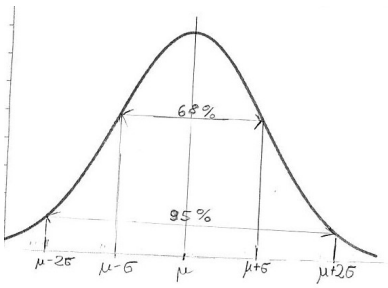
Berichte und Beiträge des Arbeitskreise Frauen und Mathematik

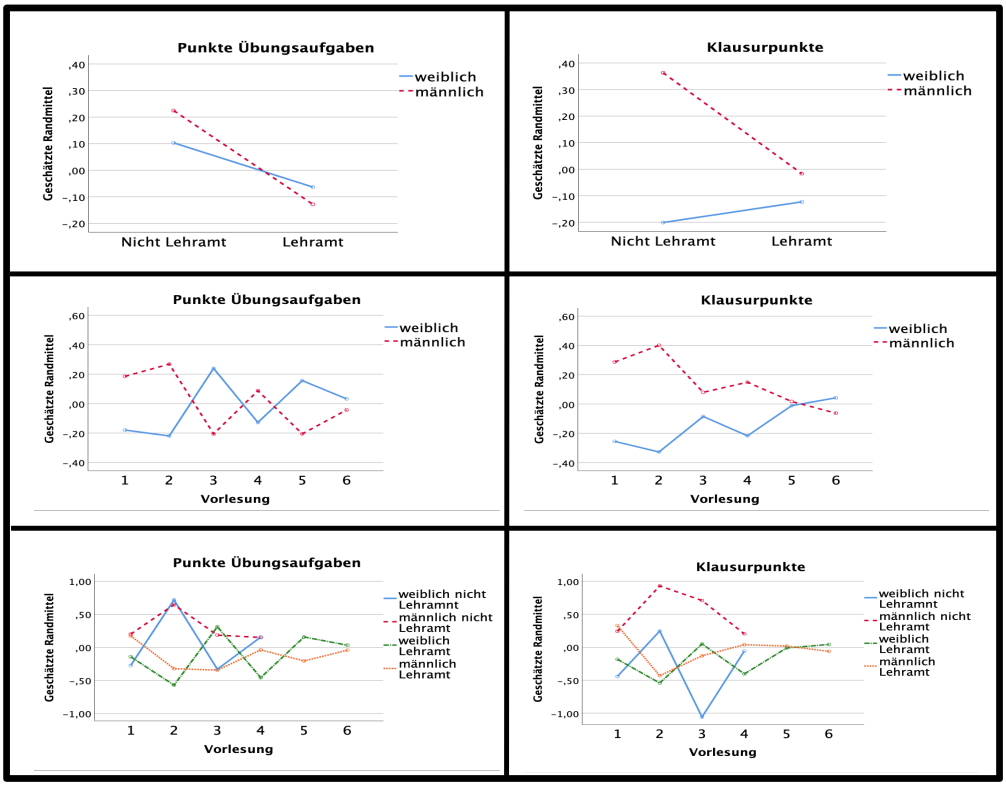
Andrea Blunck, Renate Motzer (Hrsg.)

Mathematik und Gender

Transferband 5



Sophie German Maria Agnesi



Sophie Germain: https://de.wikiversity.org/wiki/Datei:Portrait_Sophie_Germain.jpg
-Maria Agnesi: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Portrait_of_Maria_Gaet_-_Agnesi_MET_DP805437.jpg

Inhaltsverzeichnis

„Wind of Change?“ – Mathematikschulbücher im Fokus

Anina Mischau und Kiymet Orhan S. 5

“Frauen in der Geschichte der Mathematik“ – eine Lehrveranstaltung für Studierende des Lehramts

Andrea Blunck S. 29

Der „Matilda-Effekt“ in der Philosophiegeschichte der Mathematik

Beispiele, Herausforderungen und Perspektiven

Andrea Reichenberg S. 42

Prüfungsformate als Ansatzpunkt gendersensibler universitärer Lehre im Fach Mathematik

Robin Göller, Lara Gildehaus, Michael Liebendörfer, Jörn Steuding S. 59

Genderthemen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II

Renate Motzer S. 77

Buchbesprechung zu

Cordula Tollmien, Die Lebens- und Familiengeschichte der Mathematikerin Emmy Noether in Einzelperspektiven

Renate Motzer S. 83

Autor:innen S. 85

Vorwort

Wir freuen uns, Ihnen den neuen Band aus der Reihe „Mathematik und Gender“ vorstellen zu dürfen.

Wieder können wir den Blick in die Geschichte der Frauen in der Mathematik mit dem Blick in heutige Klassenzimmer und die heutige Situation an der Universität verbinden.

Im ersten Beitrag berichten Anina Mischau und Kiymet Orhan ausgewählte Ergebnisse aus einer genderorientierten Analyse neuerer Mathematikschulbücher. Neben den Befunden aus eigenen Analysen sind in dem Beitrag auch ausgewählte Aspekte aus drei Masterarbeiten integriert, die im Anschluss an ein Seminar zur gendersensiblen Gestaltung des Mathematikunterrichts entstanden sind. Insgesamt zeigen die Befunde sowohl eine Reproduktion wie auch Tendenzen der Veränderung der in früheren Schulbuchanalysen festgestellten Darstellung ungleicher Geschlechterverhältnisse und Geschlechterstereotype in Mathematikschulbüchern.. Darüber hinaus wird die Mathematik weiterhin als Männerdomäne präsentiert, denn Mathematikerinnen vermisst man auch in modernen Schulbüchern immer noch sehr.

Dass es auch in der Mathematikgeschichte viele Frauen gab, an deren Werk und Leben auch im Schulunterricht und in Universitätsveranstaltungen angeknüpft werden kann, zeigen die Beiträge von Andrea Blunck und Andrea Reichenberger.

Robin Göller, Lara Gildehaus, Michael Liebendörfer und Jörn Steuding berichten aus der Studieneingangsphase genderspezifische Beobachtungen bei der Art der Betreuung und vor allem der Art der Leistungserhebung. Bzgl. der Art der Prüfungsformate wird vor allem zwischen den (bewerteten) Übungsaufgaben, die man ohne Zeitdruck bearbeiten kann, und den Klausuraufgabenunterschieden, in die man sich unter Zeitdruck in sehr schnell eindenken muss.

Zuletzt stellt Renate Motzer einige Aufgaben vor mit gendersensiblem Hintergrund, die bei der Behandlung von Statistiken eingesetzt werden können. Zum einen geht es um PISA-Ergebnisse und ob die dabei aufgetretenen Leistungsunterschiede zwischen den Geschlechtern signifikant sind. Des Weiteren geht es um Fußballergebnisse (z.B. die Häufigkeit von Unentschieden) und die Frage, ob es für den Unterricht wünschenswert wäre, neben dem Männerfußball auch die Ergebnisse aus dem Frauenfußball zu untersuchen. Diskutiert wird, wie diese Aufgaben im Unterricht thematisiert werden können und ob die Gefahr besteht, dabei Vorurteile zu verstärken, oder die Chance, sie kritisch zu hinterfragen.

Ganz am Ende werden die ersten beiden Bände zu „Die Lebens- und Familiengeschichte der Mathematikerin Emmy Noether in Einzelaspekten“ von Cordula Tollmien vorgestellt.

Wir wünschen Ihnen eine anregende Lektüre. Die Autorinnen und Autoren freuen sich auch über (kritische) Rückmeldungen.

Andrea Blunck und Renate Motzer

„Wind of Change“?[1] – Mathematikschulbücher im Fokus

Anina Mischau und Kiymet Orhan

Schulbücher spielen auch heute noch, trotz wachsender Verbreitung und Verwendung „Neuer Medien“ oder seitens der Lehrkräfte selbst entwickelter Lernmaterialien, eine zentrale Rolle im Unterrichtsalltag und damit auch für die schulische Sozialisation (vgl. Jochim, 2014). Die produkt- und wirkungsorientierte Schulbuchforschung hat, mit Blick auf die didaktische und vor allem auf die außerschulische Funktion von Schulbüchern, häufig darauf verwiesen, dass Schulbücher jedoch nicht nur Fachwissen, sondern auch „soziokulturelles Wissen“ vermitteln (z.B. Weinbrenner, 1995; Ebner & Schön, 2012). Dies impliziert, dass durch die Gestaltung von Schulbüchern nicht nur die eigentlichen, fachdidaktisch aufbereiteten, fachwissenschaftlichen Themen und Inhalte, sondern zugleich auch gesellschaftliche Normen und Werte zu einem festen Bestandteil der Bücher werden und diese damit (verstanden als soziokulturelles Wissen) auch über Schulbücher transportiert und vermittelt werden (Bamberger, 1998; Paseka, 2004).

Dass dieses soziokulturelle Wissen auch z.B. Vorstellungen, Normen und Werte über Geschlechter umfasst, wird seit nunmehr über 30 Jahren in der genderorientierten Schulbuchforschung problematisiert. Zahlreiche Autor*innen haben Schulbücher deshalb als Teil des heimlichen Lehrplans beschrieben, der über „die impliziten, subtilen Botschaften über Weiblichkeiten und Männlichkeiten […] Frauen- und Männerbilder [und damit letztlich] die herrschenden Geschlechterverhältnisse“ zementiert (Schneider et al. 2011, S. 17f.). Diese Sichtweise impliziert: Unabhängig vom Fach transportieren und reproduzieren Schulbücher also auch die innerhalb einer Gesellschaft soziokulturell geprägten Geschlechterbilder und Geschlechterstereotype und damit verbundene Vorstellungen oder Zuschreibungen von z.B. typisch „männlichen“ bzw. „weiblichen“ Eigenschaften, Fähigkeiten, Interessen, Kompetenzen, Rollen und Handlungsräumen (vgl. z.B. Paseka, 2004; Finsterwald, 2008).[2]

Dies gilt auch für Mathematikschulbücher. Entsprechende Analysen konnten – neben einer allgemein feststellbaren ungleichen Präsenz der Geschlechter – beispielsweise Folgendes (immer wieder) aufzeigen (zusammenfassend Hunze, 2003; Mischau & Martinović, 2017): Die Darstellung der Geschlechter folgt auch in Mathematikschulbüchern weit überwiegend traditionellen Rollenklischees und verortet Männer und Frauen z.B. in auf diese sich gründende stereotyp zugeschriebene Lebens- und Tätigkeitsbereiche, wodurch historisch gewachsene und soziokulturell geprägte Geschlechterbilder, Geschlechterrollen und damit auch Geschlechterstereotype – ungeachtet deren gesellschaftlichen Wandels – weiter tradiert und reproduziert werden.[3] Darüber hinaus hat die genderorientierte Schulbuchforschung, um nur einen weiteren Aspekt zu nennen, vielfach darauf verwiesen, dass in Mathematikschulbüchern

1 „Wind of Change“ ist der Titel einer Rockballade der Band Scorpions, die im September 1989 von Scorpions-Sänger Klaus Meine geschrieben und komponiert und von uns hier „entliehen“ wurde.

2 In diesem Zusammenhang betonen einige wenige neuere Studien, dass (Mathematik)Schulbücher nicht nur die scheinbare „Normalität“ dieser geschlechterbezogenen Zuschreibungen und Stereotype prägen und festigen, sondern zugleich eine soziokulturell konstruierte binäre Geschlechterordnung reproduzieren, d.h. somit auch eine zweigeschlechtliche, heteronormative Polarisierung als (alleiniges) Abbild gesellschaftlicher Wirklichkeit befördern (z.B. Jochim, 2014; Ott, 2014; Bittner, 2015). Dieser, einer (de)konstruktivistischen Perspektive verpflichtete (noch „junge“) Diskurs, soll hier zumindest erwähnt werden, auch wenn in diesem Betrag nicht weiter darauf eingegangen wird.

3 An dieser Stelle sei angemerkt, dass im gesamten Beitrag bewusst Begriffe und Schreibweisen wie z.B. männlich/weiblich, Frauen/Männer, Mädchen/Jungen bzw. „beide Geschlechter“ oder weibliches/männliches Geschlecht usw. für weiblich* und männlich* sozialisierte Personen benutzt werden, um die Schulbuchdebatte in ihrer historischen Entwicklung sowie das dieser teilweise zugrundeliegende essentialistische Verständnis von (Zwei)Geschlechtlichkeit korrekt wiederzugeben.

vor allem oder sogar ausschließlich Mathematiker präsentiert werden. Die fehlende Sichtbarkeit von Mathematikerinnen und ihres wissenschaftlichen Beitrags zur Disziplin(entwicklung) reproduziert jedoch nicht nur das stereotype Bild der Mathematik als eine „Männerdomäne", sondern stärkt zugleich – über damit (zumindest implizit) verknüpfte geschlechterstereotypisierende Begabungszuschreibungen mathematischer Fähigkeiten und Kompetenzen – unmittelbar auf Mathematik bezogene bzw. mit der Mathematik verknüpfte Geschlechterstereotype (Curdes, 2007; Mischau, Bohnet & Martinović, 2016).

Die meisten genderorientierten Schulbuchanalysen im deutschsprachigen Raum, die speziell oder vergleichend Mathematikschulbücher in den Blick genommen haben, entstanden bereits in den 1980er und den 1990er Jahren (zusammenfassend Hunze, 2003; Mischau & Martinović, 2017). Seither wurden nur wenige neuere Untersuchungen publiziert (z.B. Jochim, 2014; Moser & Hannover, 2014; Ott, 2014, 2016), die Aussagen zu einem möglichen Wandel von Mathematikschulbüchern und einer möglichen Entwicklung hin zu einer gendersensibleren Gestaltung erlauben würden. Diese Tatsache motivierte uns, das Thema wiederaufzunehmen, um neuere Erkenntnisse gewinnen und diese möglicherweise mit älteren Befunden kontrastieren zu können. Das übergeordnete Forschungsinteresse lag darauf zu prüfen, ob und inwieweit in neueren Mathematikschulbüchern eine „gleichberechtigte" und „stereotypfreie" Darstellung der Geschlechter festgestellt werden kann.[4] Im Folgenden werden einige ausgewählte Befunde dieser Analysen vorgestellt – zunächst jedoch wird kurz auf die Auswahl der in die Untersuchung integrierten Mathematikschulbücher eingegangen. Anschließend werden die für diesen Beitrag ausgewählten Forschungsfragen und einige zentrale Aspekte des methodischen Vorgehens vorgestellt.[5]

Auswahl der Schulbücher

Insgesamt wurden 27 Mathematikschulbücher mit ihren jeweiligen Ausgaben zwischen 2011 und 2018 in die Analyse einbezogen. Bei der Auswahl konzentrierten wir uns auf drei Jahrgänge, um möglichst unterschiedliche Bücher – letztlich jeweils neun Bücher für die Jahrgangsstufen 7 bis 9 – betrachten zu können (vgl. Tabelle 1). Alle untersuchten Bücher wurden/werden im Unterricht an Berliner Schulen verwendet und „repräsentieren" zugleich unterschiedliche Schulbuchreihen ausgewählter Verlage.[6] Bei der Auswahl wurde zudem versucht, Exemplare

4 Die KMK hat die gleichberechtigte Darstellung der Geschlechter in Schulbüchern ja bereits am 21.11.1986 in der Richtlinie 491 für alle Bundesländer Deutschlands verbindlich festgelegt (vgl. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/1986/1986_11_21-Darstellung_Mann_Frau_Schulbuecher.pdf, letzter Aufruf 16.02.2021). Dass diese Richtlinie jedoch in den folgenden Jahrzehnten nicht zufriedenstellend umgesetzt wurde, haben bisherige Schulbuchanalysen nur zu deutlich gezeigt. Unser Interesse galt demnach auch der Frage, inwieweit sich dies möglicherweise in den letzten Jahren verändert hat.

5 Das methodische Vorgehen transparenter zu machen und damit auch die Nachvollziehbarkeit der Ergebnisse zu erhöhen, schien uns aus Gründen der Wissenschaftlichkeit (aber auch einer möglichen Vergleichbarkeit bei zukünftigen Studien) geboten, da wir festgestellt haben, dass eine entsprechende Dokumentation in einigen früheren Studien bzw. Publikationen kaum oder nur unzureichend erfolgte.

6 Die „Beschränkung" auf an Berliner Schulen verwendete Mathematikschulbücher erfolgte einerseits aufgrund des Tätigkeitsbereichs und des darin begründeten speziellen Forschungsinteresses der Autorinnen, andererseits aber auch aufgrund der damit verbundenen „leichteren" Zugänglichkeit der Bücher. Die jeweiligen Schulbuchreihen haben jedoch meist auch Ausgaben für andere Bundesländer, die sich unserer Erfahrung nach (aufgrund leichter Variationen in den (Rahmen)Lehrplänen) eher bei den fachwissenschaftlichen Inhalten unterscheiden, nicht jedoch hinsichtlich der generellen Konzeption und Gestaltung der Bücher. Dennoch wäre es spannend, in einer anderen Untersuchung unsere Befunde aus dieser Perspektive noch einmal zu „überprüfen" und zu vergleichen. Der Anspruch auf gendersensible

jeder Schulbuchreihe für mindestens zwei Jahrgangsstufen zu integrieren. War dies im Einzelfall nicht möglich, z.B., weil die aktuellste uns zugängliche Ausgabe nicht im ausgewählten Betrachtungszeitraum lag, wurden alternativ auch Bücher anderer Schulbuchreihen derselben Verlage in die Analyse einbezogen.[7]

	Verlag	Name des Buches	Jahr	Kürzel
1	C.C. Buchner	mathe.delta 7	2016	B71
2	C.C. Buchner	Formel 7	2016	B72
3	Cornelsen	Zahlen und Größen 7	2016	C71
4	Cornelsen	Fundamente der Mathematik 7	2018	C72
5	Klett	mathe live 7	2016	K71
6	Schroedel	Mathematik SEKUNDO 7 PLUS	2012	S71
7	Schroedel	Mathematik Neue Wege 7	2014	S72
8	Schroedel/Westermann	Elemente der Mathematik 7	2017	SW71
9	Westermann	Sekundo 7	2017	W71
10	Cornelsen	Zahlen und Größen 8	2016	C81
11	Cornelsen	Fundamente der Mathematik 8	2017	C82
12	Cornelsen	mathewerkstatt 8	2015	C83
13	Duden	Mathematik - na klar! 8	2011	D81
14	Klett	mathe live 8	2014	K81
15	Schroedel	Mathematik SEKUNDO 8	2013	S81
16	Schroedel	Mathematik SEKUNDO 8 PLUS	2012	S82
17	Schroedel/Westermann	Elemente der Mathematik 8	2016	SW81
18	Westermann	Mathematik 8	2014	W81
19	C.C. Buchner	Formel 9	2018	B91
20	Cornelsen	Fundamente der Mathematik 9	2018	C91
21	Cornelsen	Zahlen und Größen 9	2018	C92
22	Cornelsen	mathewerkstatt 9	2016	C93
23	Duden	Mathematik - na klar! 9	2012	D91
24	Klett	mathe live 9E	2015	K91
25	Schroedel	Mathematik SEKUNDO 9	2014	S91
26	Schroedel	Mathematik SEKUNDO 9 PLUS	2013	S92
27	Schroedel/Westermann	Elemente der Mathematik 9	2017	SW91

Tabelle 1: Liste der in die Analyse einbezogenen Mathematikschulbücher

Forschungsfragen und Methode(n) der Analyse/Auswertung

Damit die im Weiteren dargestellten Ergebnisse mit bereits vorhandenen Forschungsbefunden verglichen oder in Bezug gesetzt werden konnten, wurden – in Anlehnung an ausgewählte

Mathematikschulbücher besteht natürlich für Bücher aller Schulformen oder stufenbezogener Leistungsniveaus, so dass eine diesbezügliche differenzierte Ausweisung für uns nicht von Bedeutung ist.

7 An der Analyse waren insgesamt fünf Personen beteiligt. Die beiden Autorinnen dieses Betrags übernahmen selbst die Analyse von 13 der 27 Mathematikschulbücher. 14 Bücher wurden – demselben methodischen Vorgehen folgend – in drei unveröffentlichten Masterarbeiten analysiert (vgl. Nikolaus, 2015; Barcoe, 2018; Lammok, 2019). Diese hatten jedoch teilweise unterschiedliche Schwerpunkte, so dass hier nur die jeweils vergleichbaren Befunde sowie jene der im Betrachtungszeitraum liegenden Bücher aufgearbeitet und aufgenommen wurden.

Untersuchungsfragen aus und Diskurse zu früheren Arbeiten – in die empirische Analyse sowohl quantitative als auch qualitative Aspekte einbezogen.

Um der Frage nachgehen zu können, ob die Darstellung der Geschlechter in den für die Untersuchung ausgewählten neueren Schulbüchern ausgewogen bzw. gleichberechtigt ist, wurden zunächst auf der Basis von quantitativen Analysen für alle 27 Mathematikschulbücher die Anteile der Geschlechter in Text und Bild insgesamt und sodann bezogen auf jeweils ausgewählten Bereiche/Aspekte erfasst und ausgewertet. Für die Ergebnispräsentation in diesem Beitrag wurden folgende Forschungsfragen ausgewählt:

- Welches Geschlechterverhältnis zeigt sich bei den in den Büchern dargestellten und/oder erwähnten erwachsenen Personen, welches bei Kindern/Jugendlichen?
- Welches Geschlechterverhältnis zeigt sich bei erwachsenen Personen, die im Zusammenhang mit dem Erwerbsbereich oder in Verbindung mit Berufsbezeichnungen dargestellt bzw. genannt werden?
- Welches Geschlechterverhältnis zeigt sich bei erwachsenen Personen, die im Zusammenhang mit dem Bereich Haushalt/Familie und/oder in Verbindung mit Haushaltstätigkeiten dargestellt bzw. erwähnt werden?
- Welches Geschlechterverhältnis zeigt sich bei der Darstellung und/oder Benennung bedeutender Persönlichkeiten in Geschichte und Gegenwart und dabei speziell mit Blick auf die Mathematik?

Quantitative Analysen ermöglichen zwar Aussagen darüber, inwiefern sich in den untersuchten Mathematikschulbüchern eine ausgewogene oder gleichberechtigte Repräsentation der Geschlechter insgesamt, in bestimmten Bereichen oder hinsichtlich ausgewählter Aspekte feststellen lässt, nicht jedoch darüber, ob in der Darstellung der Geschlechter (weiterhin) Stereotype (re)produziert werden. Diese möglicherweise zu erfassen und näher beschreiben zu können, war Ziel vertiefender qualitativer Analysen, denn quantitative Ergebnisse bedürfen immer auch einer qualitativen Interpretation (Voglmayr, 2009), um die beschriebenen übergeordneten Forschungsfragen umfassend beantworten zu können. Daher wurde im Rahmen der qualitativen Analyse, in der vertiefend auch die (inhaltlichen) Kontexte und die sie begleitenden oder ergänzenden Illustrationen betrachtet wurden, bei den für diesen Beitrag ausgewählten Aspekten – auf der Basis von 12 der insgesamt 27 untersuchten Mathematikschulbücher (je 4 pro Jahrgangsstufe aus den Jahren 2016-2018)[8] – folgenden Teilfragen nachgegangen:

- In welchen Berufen/Erwerbsbereichen werden Frauen und Männer dargestellt? Zeigen sich dabei z.B. geschlechterbezogene Unterschiede in der Bandbreite der Berufs- bzw. Tätigkeitsfelder, in der „Zuordnung“ zu sog. Frauen- und/oder Männerberufen oder hinsichtlich der beruflichen Positionen?

8 In die Auswahl aufgenommen wurden nur jene Bücher, für die zu allen quantitativen Aspekten Analysen vorlagen, was bei zwei Masterarbeiten nicht der Fall war. Die Anzahl der Bücher sollte zudem für jede Jahrgangsstufe gleich sein und die möglichst neuesten Erscheinungsjahre berücksichtigen. Da das quantitative Material zudem sehr umfangreich war, wurde pragmatisch die Entscheidung auf eine Beschränkung der Ergebnisdarstellung hier bezogen auf 12 Mathematikschulbücher getroffen.

- Bei welchen Tätigkeiten im Bereich Haushalt/Familie werden Frauen und Männer dargestellt und zeigen sich dabei z.B. geschlechterbezogene Unterschiede in der Art der ausgeübten Haushalts-/Familientätigkeiten?
- Welche bedeutenden Persönlichkeiten werden präsentiert? Zeigen sich dabei geschlechterbezogene Unterschiede hinsichtlich der Disziplinen oder der gesellschaftlichen Bereiche, für die diese Persönlichkeiten stehen? Und insbesondere: Welche Mathematiker*innen sind in den Schulbüchern zu finden?

Um die gestellten Fragen zu beantworten, wurde für alle 27 in die Untersuchung integrierten Mathematikschulbücher zunächst die quantitative Analyse durchgeführt. Dies diente der Bestimmung der jeweiligen Bezugsgröße(n) für die darzustellenden Geschlechterverhältnisse (z.B. Personen insgesamt und für weitere Betrachtungen z.B. Erwerbstätige insgesamt usw.). Zentral dabei war, dass für jede Bezugsgröße nur die im Textmaterial[9] und in den bildlichen Darstellungen (Zeichnungen, Fotos, sonstige Illustrationen) vorkommenden Personen aufgenommen wurden, deren Geschlecht eindeutig als männlich bzw. weiblich identifizierbar war. Diese wurde sodann den beiden großen Kategorien „Erwachsene“ und „Kinder/Jugendliche“ zugeordnet, um insgesamt gruppenspezifische Auswertungen und je nach Bedarf für deren Teilgruppen vornehmen zu können.[10] Eine besondere Herausforderung war die Festlegung von Kriterien oder Regeln zur Erfassung der „eindeutigen“ Geschlechteridentifizierung (und ggf. der Altersgruppenzuordnung). Die wichtigsten waren dabei:

- Eine Geschlechterzuordnung von auf bildlichen Darstellungen gezeigten Personen ohne textliche Bezugnahme erfolgte aufgrund der „äußerlichen“ Geschlechtermarkierung durch z.B. Kleidung, Frisuren oder sonstigen Accessoires (z.B. Schmuck).
- Bildliche Darstellungen, auf denen die Personen sehr klein abgebildet und deshalb nicht eindeutig erkennbar waren, wurden nicht mit in die Zählung aufgenommen. Auch bei der Darstellung von (größeren) Gruppen, wurden nur jene Personen erfasst, die eindeutig erkennbar und damit zuordenbar waren.
- Bei Bildabfolgen (im Kontext z.B. einer Aufgabenstellung) wurde(n) die auftretende(n) Person(en) nur einmal gezählt, falls es sich um dieselbe(n) Person(en) handelte. Vergleichbares gilt auch für das Textmaterial: Wenn in einer (inhaltlich zusammenhängenden) Textpassage (eine oder mehrere) Personen mehrfach erwähnt wurden und es sich um dieselbe(n) Person(en) handelte, ging(en) diese nur einmal in die Auszählung ein. Dies kommt z.B. häufiger bei Mathematikaufgaben mit mehreren Unteraufgaben oder in Beschreibungen von Aufgabenkontexten vor. Abbildungen mit Namensbeschriftungen (z.B. bei berühmten Personen) wurden nicht separat als Bild und als Textmaterial gewertet, sondern als Einheit gesehen und nur einmal erfasst.

9 Zum Textmaterial gehören Textaufgaben, alle (Sach-)Texte, Beschriftungen von Abbildungen, Texte, die Illustrationen beschreiben oder Texte in Tabellen, alle an Schüler*innen gerichteten Arbeitsaufträge sowie Spiel- oder Bauanleitungen.

10 Personen, bei denen das Geschlecht nicht eindeutig identifiziert werden konnte, wurden zwar ebenfalls (gesondert) erfasst, nicht jedoch in die Auswertung mit einbezogen.

- Eine eindeutige Geschlechteridentifizierung und -zuordnung (allein) auf der Basis des Textmaterials erfolgte z.B. aufgrund der Geschlechterreferenz bzw. der Geschlechtermarkierung von Vornamen, geschlechterbezogenen Formen der Berufsbezeichnungen, der Anrede (z.B. Herr x, Frau y) oder von Verwandtschafts- oder Freundschaftsbeziehungen (z.B. Onkel, Tante, Sohn, Tochter, Großmutter, Großvater, Freund, Freundin usw.). Letzteres war zudem z.B. auch für eine eindeutige Altersgruppenzuordnung entscheidend. Geschlechterneutrale Vornamen, Bezeichnungen und/oder geschlechterabstrakte Ausdrücke, auch jene, die semantisch bedingt den Plural bereits bestimmen (z.B. Kind(er), Eltern, Familie, Schulklasse, Gruppe, Lehrkräfte, Menschen usw.), wurden somit nicht in die Auswertung einbezogen, bzw. im Einzelfall nur dann, wenn die Kombination von Text und Bild eine eindeutige Geschlechterzuordnung ermöglichte.
- Generische Maskulina in Singular oder Plural wurden je nach Aufgabenkontext entweder Jungen (z.B. der Schüler) oder Männern (z.B. Tischler) zugeteilt. Wenn die Altersgruppe aus dem Kontext nicht eindeutig zu erschließen war (z.B. Zuschauer, Besucher, Freunde usw.), wurde die maskuline Form der Kategorie „Männer“ zugeteilt. Wenn Paarformen in Singular oder Plural auftreten, wurde durch den Aufgabenkontext die Zuteilung zu der jeweiligen Altersgruppe und/oder ggf. dem Geschlecht entschieden.
- Personenbezeichnungen im Plural (z.B. Zuschauer, eine Gruppe von Freundinnen usw.) wurden nur einmal erfasst, um zu vermeiden, dass z.B. Textpassagen wie „100 Zuschauer“ die Häufigkeitsauszählungen einseitig verzerren.

Aufgrund des geschilderten methodischen Vorgehens für den Umgang mit dem Bild- und Textmaterial konnten dann die Geschlechterverhältnisse für alle quantitativen Teilfragen bestimmt werden. Zugleich waren damit alle infrage kommenden Textpassagen und Illustrationen identifiziert, die auch als Basis für die darauffolgende Analyse der ausgewählten qualitativen Teilfragen dienten. Im Folgenden werden nun zusammenfassend einige zentrale quantitative wie qualitative Ergebnisse der Schulbuchanalyse vorgestellt.

Zur quantitativen Präsenz der Geschlechter

Wie bereits erwähnt, hatten frühere Mathematikschulbuchanalysen eine ungleiche Präsenz der Geschlechter bzw. die Unterrepräsentanz von vor allem Frauen aber auch von Mädchen in Text und Bild kritisiert und dementsprechend eine quantitativ ausgeglichene Darstellung beider Geschlechter gefordert (z.B. Kaiser-Messmer, 1994; Preinsberger & Weißkircher, 1997). Wurde diese Forderung, so eine der zentralen Fragen unserer Untersuchung, bei der Gestaltung neuerer Mathematikschulbüchern erfüllt? Welches Geschlechterverhältnis zeigt sich bei den in Bild und Text dargestellten oder erwähnten Personen in den hier exemplarisch analysierten Mathematikschulbüchern? Die Ergebnisse werden, in Anlehnung an Darstellungen in früheren Studien, getrennt nach Erwachsenen und nach Kindern/Jugendlichen beschrieben (vgl. dazu auch die Tabellen 1 und 2 im Anhang).

Abbildung 1 zeigt zunächst zusammenfassend, dass sich das Geschlechterverhältnis bei den insgesamt 3.260 in Bild und Text dargestellten bzw. benannten Erwachsenen, deren Geschlecht eindeutig identifiziert und zugeordnet werden konnte (vgl. die Tabellen 7 und 8 im Anhang),

auch in neueren Mathematikschulbüchern noch immer sehr ungleich gestaltet. Insgesamt sind – und dies gilt trotz leichter Unterschiede zusammengefasst auch für alle Jahrgangsstufen – nicht einmal ganz ein Drittel der in den Büchern vorkommenden erwachsenen Personen Frauen.

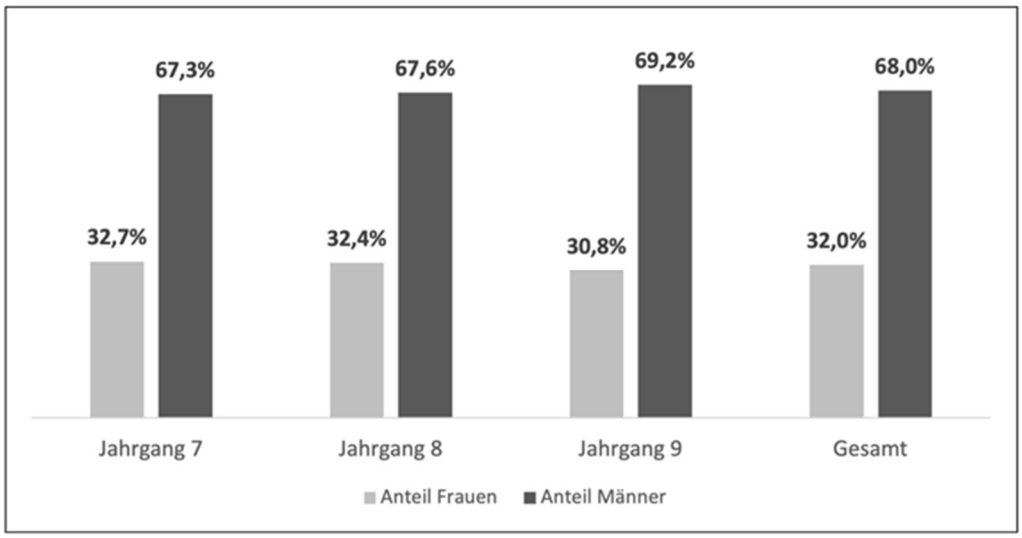


Abbildung 1: Geschlechterverhältnis bei erwachsenen Personen (insgesamt und nach Jahrgängen)

Ein Vergleich der untersuchten Bücher für die einzelnen Jahrgänge macht dann im Detail jedoch sichtbar, dass die Anteile der Frauen zwischen den einzelnen Schulbüchern zum Teil deutlich variieren. So lässt sich unter den Büchern für die 7. Klasse immerhin ein Buch finden, bei dem der Frauenanteil nennenswert über einem Drittel liegt (C72). Ein Ergebnis, das sich auch für drei Bücher der 8. Klasse (S81, S82 und W81) und für zwei Bücher der 9. Klasse (S91, S92) aufzeigen lässt (vgl. Tabelle 1 im Anhang). Es gibt jedoch in jedem Jahrgang auch Mathematikschulbücher deren Frauenanteil bei den dargestellten/erwähnten erwachsenen Personen nicht einmal das für insgesamt als Tendenz beschriebene Drittel ausmacht. So erreichen die Frauenanteile bei jeweils zwei Büchern für die 7. und die 8. Klasse nicht einmal 30% (B71 und S72 sowie C81 und SW81). Besonders ungleich ist das Geschlechterverhältnis bei den Mathematikschulbüchern der 9. Jahrgangsstufe. Von den neun untersuchten Büchern weisen tatsächlich sechs einen Frauenanteil von unter 30% auf, wobei in zwei Büchern nicht einmal ein Anteil von 10% erreicht wird (C91 und D91) (vgl. Tabelle 1 im Anhang).

Betrachtet man also die Nennung oder Darstellung von erwachsenen Personen, so sind Frauen in allen 27 untersuchten Mathematikschulbüchern noch immer (und dies z.T. deutlich) seltener vertreten als Männer. An ihrer in quasi allen früheren Schulbuchanalysen festgestellten quantitativen Unterrepräsentanz hat sich demnach auch bei den hier exemplarisch betrachteten Mathematikschulbüchern der Jahre 2011-2018 nichts Wesentliches geändert. Wendet man den Blick auf das Geschlechterverhältnis der in Bild und Text vorkommenden Kinder bzw. Jugendlichen, ergibt sich bei den untersuchten Mathematikschulbüchern ein deutlich anderes Bild.

So zeigt Abbildung 2: Insgesamt und zugleich in allen Jahrgangsstufen ist das Geschlechterverhältnis bei den insgesamt 9.481 abgebildeten und/oder erwähnten Kindern/Jugendlichen, deren Geschlecht eindeutig identifizierbar war, deutlich ausgewogener als bei den Erwachsenen – ein Befund, den tendenziell bereits einige andere Schulbuchanalysen (ab den 1990er Jahren) aufzeigen konnten (z.B. Kaiser-Messmer, 1994; Thomas, 1999; Moser & Hannover, 2014).

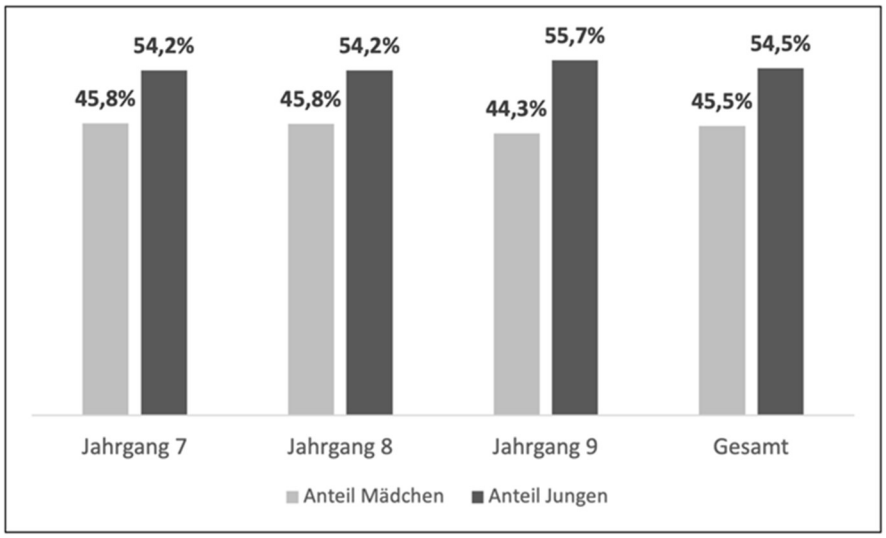


Abbildung 2: Geschlechterverhältnis bei Kindern/Jugendlichen (insgesamt und nach Jahrgängen)

Auch hier macht ein Vergleich zwar Unterschiede zwischen den untersuchten Büchern sichtbar, diese fallen aber überwiegend weniger deutlich aus als bei den erwachsenen Personen (vgl. Tabelle 2 im Anhang). Erwähnenswert ist, dass in jeder Jahrgangsstufe mindestens ein Mathematikschulbuch mit einem (nahezu) paritätischen Geschlechterverhältnis zu finden ist (für die 7. Klasse K 71, S72 und W71; für die 8. und 9. Klasse W81 und C92) und sich in einer ganzen Reihe weiterer Bücher die Anteile zumindest in diese Richtung annähern. In einem Buch (K91) waren sogar mehr als die Hälfte der Kinder/Jugendlichen Mädchen bzw. junge Frauen. Allerdings gibt es über alle Jahrgangsstufen hinweg auch sechs Bücher (davon allein drei für die 7. Klasse), in denen weniger als 40% der Kinder/Jugendlichen dem Geschlecht „weiblich" zugeordnet werden konnten (vgl. Tabelle 2 im Anhang).

Neben der problematisierten Unterrepräsentation weiblicher Personen – zunächst generell, später bezogen vor allem auf Erwachsene – wurde in genderorientierten Schulbuchanalysen immer wieder hervorgehoben, dass die Darstellung der Geschlechter traditionellen Rollenklischees folgt. Nach Mischau & Martinović (2017) war eines der zentralen Themen in diesen Diskursen „die nahezu durchgängige Verortung von erwachsenen Personen entlang der durch die sogenannte geschlechtsspezifische Arbeitsteilung gezogenen Trennlinie stereotyp zugewiesener Tätigkeitsbereiche" (ebd., S. 93). Diesen Diskussionsstrang nehmen wir in dem nächsten Abschnitt auf, um Geschlechterverhältnisse und (mögliche) Geschlechterstereotypen in den beiden Bereichen „Erwerbstätigkeit" und „Haushalt/Familie" zu betrachten.

Geschlechterverhältnisse und Geschlechterstereotype im Erwerbsbereich und im Bereich „Haushalt und Familie"

Bereits frühe Untersuchungen aus den 1980er Jahren stellten fest, dass Männer in (Mathematik)Schulbüchern sehr häufig als Erwerbstätige und dabei in vielen verschiedenen Berufsfeldern und unterschiedlichen Positionen, Frauen jedoch hauptsächlich im Zusammenhang mit Familien- oder Haushaltstätigkeiten in Erscheinung traten. Waren Frauen erwerbstätig, dann weit überwiegend als „klassische Zuverdienerin", in deutlich weniger Berufssparten als Männer, häufiger in weniger guten oder untergeordneten Positionen sowie nicht selten (nur) in sogenannten frauentypischen, d.h. mit der Frauenrolle konformen

Tätigkeits- bzw. Berufsfeldern (z.B. Glötzner, 1982; Lopatecki & Lüking, 1989).[11] Diese dominante Verortung sowie die damit verbundene quantitative wie qualitative Einengung[12] blieb selbst dann noch aufrechterhalten, als Studien ab etwa Mitte der 1990er Jahren verstärkt aufzeigen konnten, dass Frauen generell etwas häufiger auch im Erwerbsbereich, in unterschiedlicheren Berufsfeldern und Positionen (z.B. Thomas, 1999) und Männer zunächst vereinzelt, später etwas häufiger bei Tätigkeiten im häuslichen/familiären Bereich dargestellt wurden, wobei jedoch die „Aufteilung" häuslicher oder familiärer Tätigkeiten weit überwiegend einer „klaren Rollenvorstellung" verhaftet blieb: Während Frauen z.B. einkaufen, putzen, kochen oder sich um die Kinder kümmern, übernehmen Männer z.B. handwerkliche Tätigkeiten im Haushalt inklusive dafür notwendiger Einkäufe (z.B. im Baumarkt) oder kümmern sich um das Auto (z.B. Lindner & Lukesch, 1994). Inwieweit bestätigen nun unsere Ergebnisse die beschriebenen früheren Befunde oder können wir in neueren Mathematikschulbüchern für beide Bereiche Veränderungen feststellen?

Betrachten wir zunächst die Ergebnisse zu dem Aspekt Erwerbstätigkeit. Insgesamt konnten in den 27 Mathematikschulbüchern 742 dem Erwerbsbereich zuzuordnende Personen erfasst werden, deren Geschlecht eindeutig identifizierbar war.[13] Welches Geschlechterverhältnis lässt sich für diese Personengruppe aufzeigen?

Abbildung 3 offenbart nur zu deutlich, dass der Erwerbsbereich auch in den hier untersuchten neueren Mathematikschulbüchern aus den Jahren 2011-2018 (quantitativ) nach wie vor von Männern dominiert wird. Insgesamt liegt der Frauenanteil an den in den Büchern vorkommenden Erwerbstätigen – und dies gilt mit nur geringfügigen Abweichungen auch für alle Jahrgangsstufen – bei etwa einem Fünftel. Dieses ungleiche Geschlechterverhältnis bleibt auch dann bestehen, wenn man die Perspektive bzw. die Bezugsgröße wechselt. Von allen in den Büchern vorkommenden Frauen sind anteilig nur ca. 14% im Zusammenhang mit dem Erwerbsbereich dargestellt/benannt, von den Männern hingegen fast 27% (vgl. die Tabellen 7 und 8 im Anhang).

11 Allerdings muss auch erwähnt werden, dass die Bandbreite der Berufe bzw. Tätigkeitsfelder der Männer obwohl weit ausdifferenzierter, dennoch ebenso geschlechterstereotyp dargestellt wurde, d. h. Männern stehen zwar mehr Möglichkeiten offen, diese umfassen aber offensichtlich nicht sog. „frauentypische" Berufsfelder.

12 So wiesen zum Beispiel Lopatecki & Lüking (1989) die Darstellung von Männern in 135 unterschiedlichen Berufen bzw. Tätigkeitsbereichen, Frauen dagegen nur in 27 Berufen nach und Thomas (1999) zehn Jahre später für Männer eine Bandbreite von 194, für Frauen von 53 verschiedenen Berufen.

13 Erfasst wurden alle erwachsenen Personen, die im Text oder in Bildern im Zusammenhang mit einer Erwerbs- oder Berufstätigkeit genannt bzw. dargestellt oder explizit durch eine Berufsbezeichnung markiert waren (z.B. der Bäcker, eine Verkäuferin usw.). Diese werden im Weiteren als Kategorie „Erwerbstätige" geführt. In die Auswertung wurden dann jene Personen aufgenommen, deren Geschlecht nach dem beschriebenen methodischen Vorgehen eindeutig identifiziert werden konnte.

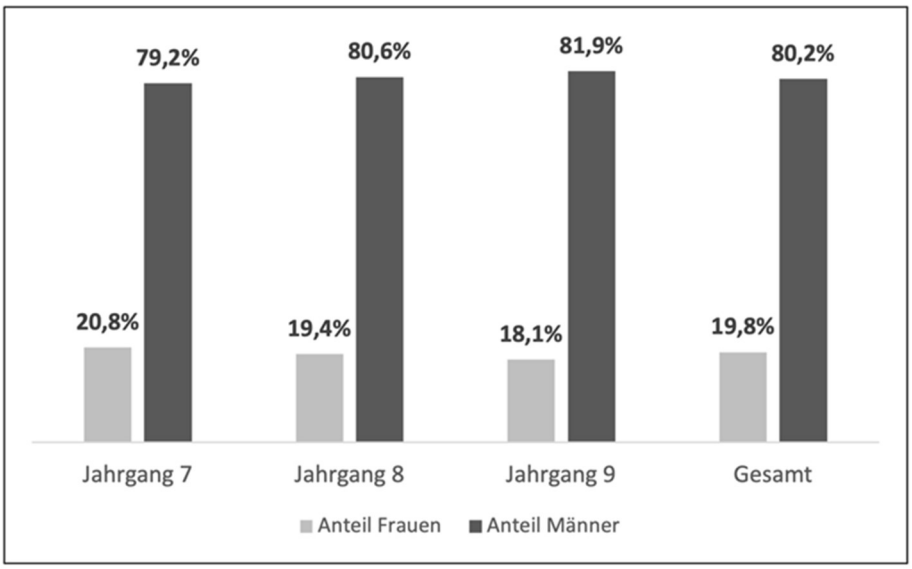


Abbildung 3: Geschlechterverhältnis bei Erwerbstätigen (insgesamt und nach Jahrgängen)

Ein differenzierter Blick auf die untersuchten Bücher für die einzelnen Jahrgänge zeigt darüber hinaus, dass die Frauenanteile an den Erwerbstätigen zwischen den einzelnen Schulbüchern zum Teil deutlich variieren. So lassen sich einerseits für die 7. Klasse immerhin zwei Bücher (S71, W71), für die 8. Klasse fünf Bücher (C83, K81, S81, S82, W81) und für die 9. Klasse drei Bücher (C93, K91, SW91) benennen, in denen der Anteil der Frauen an den Erwerbstätigen über einem Fünftel, genauer zwischen knapp 23% und knapp 35% liegt. Andererseits liegen die Frauenanteile an den Erwerbstätigen in einem Buch der Jahrgangsstufe 7 (C71) sowie in drei bzw. zwei Büchern der Jahrgangsstufen 8 und 9 (C81, C82, SW81 sowie C91 und C92) noch nicht einmal bei 10% (vgl. Tabelle 3 im Anhang).[14]

Tabelle 5 im Anhang bestätigt auf der Basis der qualitativen Analysen für 12 der hier untersuchten Mathematikschulbücher, in der jede Berufs- oder Tätigkeitsbezeichnung nach Geschlecht erfasst und ggf. gebildeten Kategorien[15] zugeordnet wurde, bereits auf den ersten Blick ein weiteres Ergebnis früherer Schulbuchanalysen: Die Vielfalt der Berufe oder Tätigkeitsbereiche, in denen erwerbstätige Frauen in Text und/oder Bild präsentiert werden, ist insgesamt geringer als die der erwerbstätigen Männer. Interessant ist in diesem Zusammenhang vielleicht, dass beide Geschlechter annähernd gleich häufig im Handel und im Dienstleistungssektor „tätig sind“ (z.B. als Verkäufer*in, Händler*in, Friseur*in, Kellner*in, Bürokraft, Hausmeister*in oder als Bankangestellte/r), manche Berufsbezeichnungen aber nur entweder in der weiblichen oder männlichen Form bzw. Geschlechterzuordnung vorkommen (z.B. LKW-Fahrer, Detektiv, Sekretärin oder Krankenschwester). Im Bereich „Produktion“, vor allem jedoch im „klassischen“ Handwerk dominieren jedoch eindeutig Männer. So konnte z.B. nur je 1x eine Tischlerin (W71), eine Schreinerin (C91) und eine Goldschmiedin (C83) identifiziert werden. Männliche Erwerbstätige hingegen arbeiten, um nur einige Beispiele zu nennen, als

14 An dieser Stelle sei noch angemerkt: In den beiden Büchern, in denen generell sehr wenige Erwerbstätige vorkommen (D81 und D91), lassen sich überhaupt keine weiblichen Erwerbstätige finden. Daraus kann jedoch nicht geschlossen werden, dass der Frauenanteil steigt, je mehr Erwerbstätige insgesamt in einem Buch vorkommen, wie Tabelle 3 im Anhang verdeutlicht.

15 Hierfür ein Beispiel: Schulbezogene Lehrkräfte wurden teilweise mit Fachbezug erwähnt, der für unsere Betrachtung untergeordnet erschien (außer beim Fach Mathematik), so dass diese in einer Gesamtkategorie erfasst wurden.

Monteur, Fliesenleger, Dreher, Maurer, Tischler, Zimmermann, Maler, Bauarbeiter oder Dachdecker (vgl. Tabelle 5 im Anhang).

Was wir aufgrund unserer Ergebnisse hingegen nicht mehr in dieser „Eindeutigkeit“ offenbar früherer Studien bekräftigen können ist, dass Frauen eher in untergeordneten Positionen oder umgekehrt Männer eher in Führungspositionen präsentiert werden. Auch hinsichtlich der Frage ob – wie in früheren Schulbuchanalysen häufig angemerkt – eine eher geschlechterstereotype oder geschlechterrollenkonforme Verortung erwerbstätiger Personen zu bestimmten Berufsfeldern oder Tätigkeitsbereichen erkennbar ist, ergibt sich kein wirklich eindeutiges Bild, da eine ganze Reihe von Berufen/Tätigkeiten in ihrer Zuordnung zu beiden Geschlechtern erfasst werden konnte. Von der Tendenz – beeinflusst sicher auch durch die bereits genannte Dominanz von Männern in handwerklichen Berufen – entsteht jedoch eher der Eindruck, dass männliche Erwerbstätige weit stärker – entsprechenden stereotypen Zuschreibungen folgend – in „typischen Männerberufen“ zu finden sind als weibliche Erwerbstätige in „typischen Frauenberufen“ (vgl. Tabelle 5 im Anhang).

Für die Betrachtung des Geschlechterverhältnisses und der Frage nach der (Re)Produktion möglicher Geschlechterstereotype im Bereich „Haushalt und Familie“ muss zunächst festgehalten werden, dass eine Präsentation von erwachsenen Personen im Zusammenhang mit Haushalts- oder Familientätigkeiten deutlich seltener vorkommt als dies im bereits dargestellten Erwerbsbereich der Fall ist. In einigen Schulbüchern (C71, D81, W81 und C91) wurde sogar gänzlich darauf verzichtet (vgl. Tabelle 4 im Anhang). Insgesamt konnten in den 27 Mathematikschulbüchern 232 dem Bereich „Haushalt/Familie“ zuzuordnende Personen erfasst werden, deren Geschlecht eindeutig identifizierbar war.[16] Wie lässt sich nun aufgrund unserer Ergebnisse das Geschlechterverhältnis für diesen Bereich beschreiben?

Nach Abbildung 4 kann für die hier untersuchten Mathematikschulbücher aus den Jahren 2011-2018 die noch in früheren Studien betonte dominante Zuordnung von Frauen zum Bereich Haushalt/Familie erst einmal nicht bestätigt werden. Insgesamt und zusammenfassend für die Jahrgangsstufen 7 und 8 zeigt sich zunächst doch eine deutliche Annäherung der Geschlechteranteile an den im Zusammenhang mit Haushalts- und/oder Familientätigkeiten vorkommenden Erwachsenen. Für die Jahrgangsstufe 9 ist zusammenfassend sogar ein paritätisches Geschlechterverhältnis zu vermerken, wobei allerdings betont werden muss, dass in fünf der neun Bücher entweder keine oder jeweils nur eine Person diesem Bereich zugeordnet werden konnte (vgl. Tabelle 4 im Anhang). Die beschriebene Tendenz darf jedoch – auch aufgrund der relativ geringen Fallzahlen – nicht bereits im Sinne einer Überwindung geschlechterstereotyper Verortungen in diesem Bereich überinterpretiert werden. Wechselt man die Perspektive der Betrachtung bzw. die Bezugsgröße, zeigt sich nämlich, dass von allen in den Büchern vorkommenden Frauen anteilig (doch) mehr in den Zusammenhang mit dem Bereich Haushalt/Familie gestellt werden als von den vorkommenden Männern (annähernd 12% zu 5%) (vgl. hierzu die Tabellen 7 und 8 im Anhang). [17]

16 Erfasst wurden zunächst alle Personen, die im Text oder in Bildern im Zusammenhang mit Haushalts- oder Familientätigkeiten genannt bzw. dargestellt waren, wobei als Familientätigkeiten solche Tätigkeiten gelten, die z.B. im weitesten Sinne der Versorgung und Betreuung oder auch der „finanziellen Absicherung“ der Familie bzw. einzelner Familienmitglieder dienen. In die Auswertung wurden sodann nur jene Personen aufgenommen, die durch eine Altersgruppenzuordnung als Erwachsene bestimmt und deren Geschlecht nach dem beschriebenen methodischen Vorgehen eindeutig identifiziert werden konnte.

17 Diese Tendenz gilt übrigens auch für die Darstellung beider Geschlechter im Zusammenhang mit Elternschaft, also für die Darstellung/Benennung von Frauen bzw. Männer als Mütter bzw. Väter (jenseits von Familientätigkeiten). Allerdings waren hier die Fallzahlen so gering, dass auf eine weitergehende Betrachtung verzichtet wurde (vgl. hierzu die Tabellen 7 und 8 im Anhang).

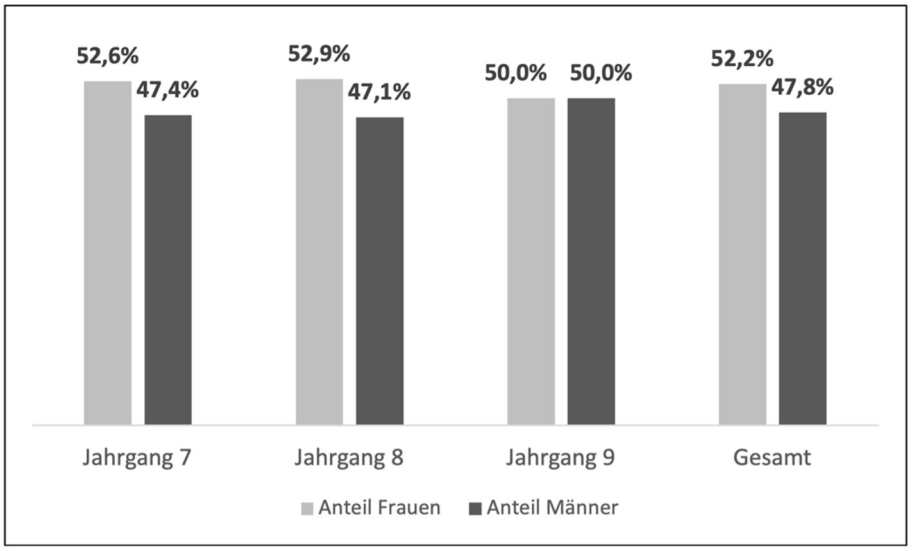


Abbildung 4: Geschlechterverhältnis im Bereich „Haushalt/Familie“ (insgesamt und nach Jahrgängen)

Auch ein differenzierter Blick auf die untersuchten Bücher für die einzelnen Jahrgänge hinterlässt ein durchaus ambivalentes Bild. So gibt es in jeder Jahrgangsstufe Bücher, in denen die Anteile der Frauen im Bereich Haushalt/Familie (teilweise deutlich) über 50% liegen – aber eben auch Bücher, in denen dies umgekehrt ist (vgl. Tabelle 4 im Anhang). Zusammenfassend kann an dieser Stelle zumindest festgehalten werden, dass der Bereich Haushalt/Familie für Aufgabenkontexte und deren Illustration im Vergleich zu den in früheren Studien untersuchten Büchern erkennbar an Bedeutung verloren hat und dass zudem in diesem Bereich offensichtlich bei dem (quantitativen) Geschlechterverhältnis „mehr in Bewegung“ ist als im Erwerbsbereich.

Die Befunde der qualitativen Analyse, in der jede Haushalts- oder Familientätigkeit nach Geschlecht erfasst wurde, verweisen tendenziell ebenfalls auf mögliche interessante Veränderungen in diesem Bereich. So können wir die in früheren Schulbuchanalysen häufig betonte geschlechterstereotype oder rollenkonforme Aufteilung oder Zuordnung von Haushalts- oder Familientätigkeiten ebenfalls nicht mehr in dieser „Eindeutigkeit“ bestätigen. In den hier untersuchten Büchern übernehmen z.B. sowohl Männer wie Frauen den Einkauf für den alltäglichen Bedarf oder Geldangelegenheiten für die Familie, beide Geschlechter kochen und kaufen Einrichtungsgegenstände oder ein Auto für die Familie. Lediglich handwerkliche Tätigkeiten werden – in Übereinstimmung mit früheren Studien – noch ausschließlich von Männern übernommen (vgl. Tabelle 6 im Anhang).

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Ergebnisse zu neueren Mathematikschulbüchern deuten insgesamt sowohl auf eine Reproduktion wie auch auf Tendenzen der Veränderung und des Aufbrechens der durch frühere Schulbuchanalysen festgestellten ungleichen Geschlechterverhältnisse und Geschlechterstereotypen in den beiden Bereichen „Erwerbstätigkeit“ und „Haushalt/Familie“ hin. Im folgenden Abschnitt wird nun – über die Betrachtung des Geschlechterverhältnisses der in Mathematikschulbüchern dargestellten/genannten bedeutenden Persönlichkeiten – auch das (vergeschlechtlichte) Bild der Mathematik selbst in den Blick genommen.

Zur Präsenz bedeutender Persönlichkeiten

Wie bereits eingangs erwähnt, wurde und wird in genderorientierten Diskursen über Mathematikschulbücher immer wieder darauf verwiesen, dass in Aufgaben oder Illustrationen

vor allem oder sogar ausschließlich Mathematiker oder andere (nichtmathematische) bedeutende Männer genannt bzw. dargestellt werden. Bedeutende Frauen und insbesondere Mathematikerinnen hingegen, so die Kritik, bleiben ungenannt und damit unsichtbar. Problematisiert wurde/wird in diesem Zusammenhang nicht nur das Fehlen weiblicher Identifikationsmodelle oder Vorbilder, sondern auch die dadurch fortwährende Tradierung des Bilds der Mathematik als eine (reine) Männerdomäne und mit der Mathematik (zumindest indirekt) verknüpfte (z.B. begabungstheoretische) Geschlechterstereotype (vgl. z.B. Langner, 1987; Tanzberger, 2003).

Da frühere Schulbuchanalysen zumeist auf eine detaillierte Erfassung oder empirische Analyse der in Mathematikschulbüchern präsentierten bedeutenden Persönlichkeiten[18] verzichtet hatten, wurde dieser Aspekt hier explizit zum Thema und Untersuchungsgegenstand gemacht. Im Rahmen der Analyse wurde zunächst quantitativ der Frage nachgegangen, welches Geschlechterverhältnis sich bei der Benennung/Darstellung bedeutender Persönlichkeiten zeigt.[19] Eine vertiefende qualitative Betrachtung der Kontexte, in denen diese Persönlichkeiten vorkommen sowie der namentlichen Erfassung derselben, sollte zusätzlich Aufschluss geben, ob sich geschlechterbezogene Unterschiede hinsichtlich der Disziplinen oder der gesellschaftlichen Bereiche, für die diese Persönlichkeiten stehen, zeigen und speziell, welche Mathematiker*innen Eingang in die Schulbücher gefunden haben und wie diese präsentiert werden. Die Ergebnisse beider Analysen sollen nun zusammenfassend dargestellt werden (vgl. dazu auch die Tabellen 9 und 10 im Anhang).

Abbildung 5 verdeutlicht zunächst auf geradezu erschreckende Weise, dass sich die Erwähnung oder Darstellung bedeutender Persönlichkeiten in Mathematikschulbüchern offensichtlich noch immer nahezu ausschließlich auf männliche Personen bezieht. Unter den in den 27 untersuchten Büchern insgesamt 284 gefundenen Verweisen[20] auf bedeutende Persönlichkeiten, deren Geschlecht eindeutig identifiziert werden konnte, befanden sich lediglich 11 Verweise auf Frauen. Dies entspricht einem Anteil von nicht einmal 4%. Vergleicht man die analysierten Schulbücher untereinander, so stellt man fest, dass in keinem der Bücher für die Jahrgangsstufe 8 und in lediglich jeweils drei (von neun) Büchern der beiden anderen Jahrgangsstufen überhaupt bedeutende Frauen vorkommen (vgl. Tabelle 9 im Anhang). Hinzu kommt, dass in allen Schulbüchern unter den bedeutenden Männern auch Mathematiker zu finden sind (insgesamt 137 Verweise/Darstellungen), während nur in einem einzigen Buch (C72) überhaupt eine Mathematikerin Erwähnung findet.

18 Die Attribuierung „bedeutend“ enthält keine Wertung, d.h. sie wird in einem umfassenderen Sinn verwendet und beinhaltet gleichermaßen auch bekannte oder berühmte Personen/Figuren unterschiedlichster Bereiche in der Geschichte und Gegenwart.

19 Dafür wurde für die untersuchten Schulbücher alle entsprechenden (namentlich gekennzeichneten) Personen, die im Text oder in Bildern vorkommen, erfasst, dem jeweiligen Geschlecht zugeordnet und zudem gesondert ausgewiesen, ob darunter Mathematiker*innen zu finden waren.

20 Aufgrund vorhandener Mehrfachnennungen einzelner Personen in den Büchern ist hier korrekterweise von Verweisen auf Persönlichkeiten zu sprechen.

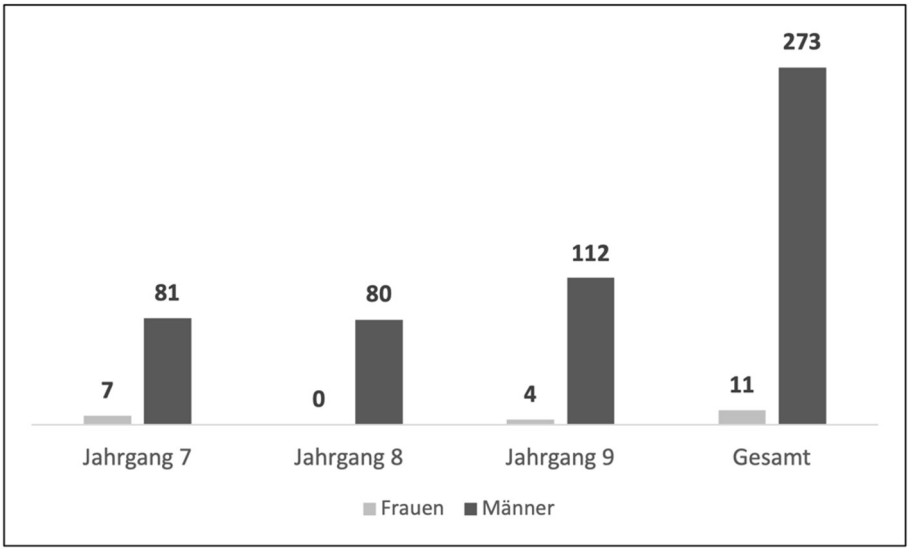


Abbildung 5: Geschlechterverhältnis bei bedeutenden Persönlichkeiten (insgesamt und nach Jahrgängen; absolute Zahlen)

Die vertiefende qualitative Analyse, in die aufgrund der vorhandenen Datenlage sowie der Bedeutung dieses Aspekts, entgegen der sonstigen Systematik nicht nur 12, sondern 18 der analysierten Mathematikschulbücher integriert wurden, zeigt zudem Folgendes: Bei Frauen wird vor allem auf bedeutende „Herrscherinnen" (Kleopatra, Maria Stuart, Katharina die Große und Queen Elizabeth II) also im weitesten Sinn auf Frauen aus dem Bereich Politik/Geschichte verwiesen. Hinzu kommen z.B. „Märchen- oder Erzählfiguren" (z.B. Gretel und Alice im Wunderland) oder auch einmal eine Designerin. Neben der deutschen Mathematikerin Emmy Noether wird jedoch nur in einem weiteren Buch (W71) eine bedeutende Wissenschaftlerin erwähnt, die polnische Physikerin/Chemikerin Marie Curie.

Demgegenüber ist die Bandbreite der gesellschaftlichen Bereiche oder Kontexte, in denen bedeutende Männer gezeigt oder genannt werden, deutlich vielfältiger. So lassen sich neben bekannten „Herrschern"/Politikern (wie z.B. Caesar, Napoleon Bonaparte, Augustus, Alexander der Große, Heinrich der III. und der IV. oder Konrad Adenauer) auch eine ganze Reihe bedeutender Schriftsteller, Künstler oder Komponisten (z.B. Christo, M.C. Escher, Albrecht Dürer, Leonardo da Vinci, Max Bill, Jules Verne, Marc Twain, Johann Sebastian Bach, Ludwig van Beethoven), zahlreiche bekannte Sportler und dabei vor allem Fußballer (z.B. Sebastian Vettel, Ma Long, Hossein Rezazadeh, Gottfried Fuchs, Toni Turek, Sepp Maier, Oliver Kahn und Uwe Seeler) aber auch Wissenschaftler/Forscher oder Erfinder aus unterschiedlichen Bereichen (z.B. Galileo Galilei, Johann Westhauser, Carl von Linné, Alexander Graham Bell, Daniel Gabriel Fahrenheit, Robert Yeates), einige „Märchen- und Erzählfiguren" (z.B. Hänsel, der Weihnachtsmann) sowie Wirtschaftsvertreter (z.B. Bill Gates) und mehr entdecken.

137 der insgesamt 273 in den 27 Mathematikschulbüchern identifizierten Verweise auf bedeutende Männer (also gut die Hälfte), bezogen sich auf Mathematiker bzw. auf Männer, die sich (auch) mit Mathematik beschäftigt haben und in diesem Kontext erwähnt werden.[21] Auch hier verdeutlicht die qualitative Analyse: Die Bandbreite der genannten/dargestellten Mathematiker ist sehr groß und umfasst nicht nur „Disziplinvertreter" aus unterschiedlichen

21 Der Kategorie „Mathematiker" wurden auch einige Personen zugeordnet, die zusätzlich oder primär auch aus anderen Bereichen/Wissenschaftsgebieten bekannt sind, in den Büchern aber explizit in ihrem mathematischen „Wirken" präsentiert werden. Beispiele hierfür sind: Platon oder Sokrates, Gottfried Wilhelm Leibniz oder James A. Garfield.

historischen Epochen oder Ländern, sondern auch aus unterschiedlichen Teilbereichen der Mathematik. Unter ihnen sind – um nur einige exemplarisch zu nennen – zahlreiche Mathematiker der Antike wie z.B. Thales von Milet, Pythagoras, Archimedes von Syrakus und Euklid von Alexandria, eine ganze Reihe deutscher Mathematiker aus unterschiedlichen Jahrhunderten wie z.B. Carl Friedrich Gauß, Karl Weierstraß, Georg Cantor, Richard Dedekind und David Hilbert, französische Mathematiker wie Blaise Pascal, François Viète oder Pierre-Simon Laplace, der choresmische Mathematiker Abu Dschaʿfar Muhammad ibn Musa al-Chwārizmī, die chinesischen Mathematiker Liu Hui und Zu Chongzhi, der polnische Mathematiker Wacław Sierpiński und der schottische Mathematiker James Gregory (vgl. zur gesamten Liste Tabelle 10 im Anhang).

So muss an dieser Stelle, mit besonderem Blick auf unseren Fokus „Mathematik", leider zusammenfassend – und dies durchaus ernüchternd – festgehalten werden: Die seit nunmehr einigen Jahrzehnten bestehende Forderung der genderorientierten Schulbuchforschung, stärker auch Mathematikerinnen in Mathematikschulbücher zu integrieren, um diese nicht nur als bedeutende Personen sichtbar zu machen, sondern um zugleich deren mathematische Leistungen zu thematisieren und zu würdigen (vgl. z.B. Öhler, 1991; Niederdrenk-Felgner, 1995; Paseka 2004), wurde offensichtlich von Schulbuchautor*innen nicht wahrgenommen oder zumindest nicht umgesetzt. Die Mathematik wird auch in neueren Schulbüchern tatsächlich noch immer als eine Wissenschaft präsentiert, deren Entwicklung von Männern bestimmt wurde/wird und die offensichtlich auch „nur" von Männern ausgeübt wurde/wird. Nicht nur Mathematikerinnen, die es zu unterschiedlichen Zeiten und in unterschiedlichen Ländern ebenfalls gegeben hat, sondern eben auch ihre Beiträge zur Erkenntnisgewinnung und damit zur Entwicklung der Disziplin oder des Fachs Mathematik, bleiben weiterhin unsichtbar oder werden unsichtbar gemacht. Letzteres kann/muss übrigens auch durch die hier durchgeführte qualitative Analyse bestätigt werden. Bedeutende Mathematiker werden fast immer im Zusammenhang mit ihrem mathematischen Wirken präsentiert. Die einzige erwähnte Mathematikerin jedoch erscheint, wie Abbildung 6 zeigt, ausgerechnet in einem Kontext ohne jeglichen Bezug zu dem mathematischen Wirken der abgebildeten Personen.[22]

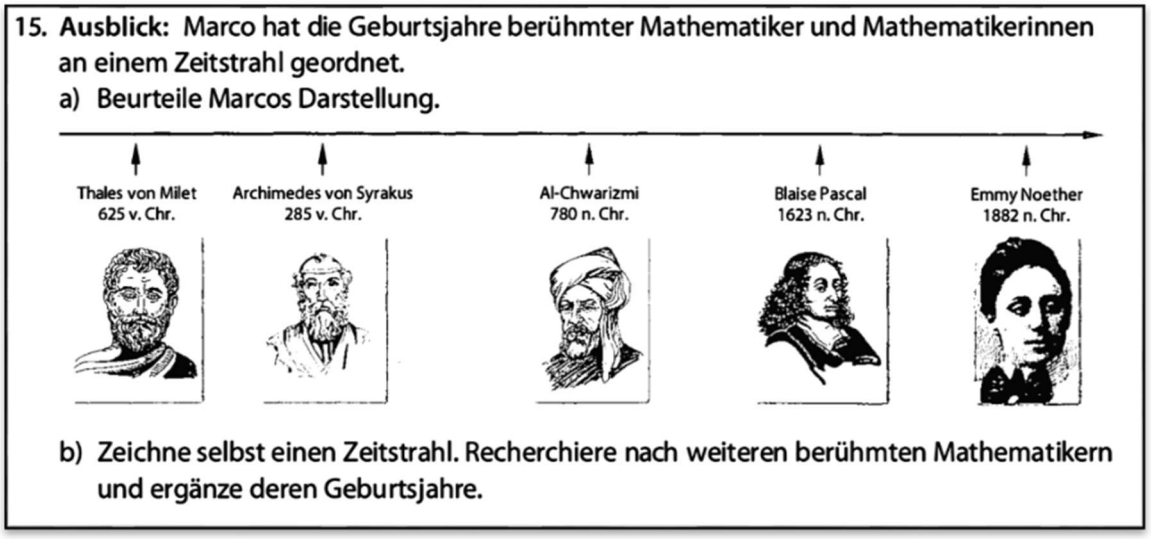


Abbildung 6: Aufgabe, in der auf Emmy Noether verwiesen wird (Quelle: C72, S. 82)

22 Dass im Aufgabenteil b zudem der Rechercheauftrag nur auf berühmte Mathematiker bezogen wird, befremdet zumindest angesichts der vorherigen Formulierung „Mathematiker und Mathematikerinnen".

Fazit und Ausblick

Frühere Schulbuchanalysen haben vielfach problematisiert, dass in Mathematikschulbüchern Frauen und Männer nicht nur quantitativ ungleich präsentiert und dass in der Präsentation zugleich Geschlechterstereotype (re)produziert werden, sondern auch, dass Mathematikschulbücher zur Stereotypisierung und Tradierung der Mathematik als eine männlich konnotierte Wissenschaft beitragen. Ausgangspunkt der hier vorgestellten Schulbuchanalyse war daher die grundsätzliche Frage, ob und inwieweit sich in neueren Mathematikschulbüchern aus den Jahren 2011-2018 eine Entwicklung hin zu einer gendersensibleren Gestaltung feststellen lässt, die Vertreter*innen der schulbezogenen Geschlechterforschung seit Jahrzehnten einfordern. Zur Beantwortung dieser Frage wurden einige ausgewählte Ergebnisse präsentiert und mit entsprechenden Befunden früherer Studien kontrastiert.

Dabei hat sich gezeigt, dass einerseits leider noch immer einige frühere Befunde bestätigt werden müssen. Nach wie vor sind Frauen z.B. insgesamt in Bild und Text deutlich unterrepräsentiert. Sie werden auch immer noch deutlich seltener als Männer im Zusammenhang mit dem Erwerbsbereich dargestellt und zudem ist die Vielfalt ihrer Berufe oder Tätigkeitsbereiche geringer als die der männlichen Erwerbstätigen. Andererseits lassen sich jedoch – im Vergleich zu früheren Studien – auch (erste) Hinweise für einen Wandel benennen. Tendenzen der Veränderung in der Geschlechterverteilung oder hinsichtlich des „Aufweichens" geschlechterstereotyper Darstellungen konnten vor allem im Bereich „Haushalt und Familie" aufgezeigt werden, vereinzelt aber auch im Erwerbsbereich z.B. mit Blick auf die beruflichen Positionen der Erwerbstätigen. Unsere Analyse der bedeutenden Persönlichkeiten in Mathematikschulbüchern wiederum hat eine bis heute ungebrochene (Re)Produktion des Bilds der Mathematik als Männerdomäne sichtbar gemacht – eine (Re)Produktion, die zugleich die auf die Mathematik bezogene bzw. mit der Mathematik verknüpfte Geschlechterstereotype einschließt. Letztlich erfüllt keines der untersuchten Bücher auch nur annähernd mögliche Kriterien einer gendersensiblen Gestaltung, wie sie z.B. von Mischau & Eilerts (2018) formuliert wurden. Dies gilt, darauf sei nur ergänzend verwiesen, auch für die verwendete Sprache. Trotz einiger guten Ansätze konnte für kein Buch eine durchgängige Verwendung einer gendersensiblen Sprache beobachtet werden.

Eine erneute Bekräftigung der seitens der schulbezogenen Geschlechterforschung immer wieder erhobenen Forderung nach einem Wandel von (Mathematik)Schulbüchern ist evident, (die Chance auf) eine Veränderung jedoch voraussetzungsvoll (vgl. Mischau & Martinović, 2017). Dies gilt nicht allein aus dem Grund, dass die Entwicklung und Gestaltung gendersensibler (Mathematik)Schulbücher notwendigerweise auch die entsprechende Genderkompetenz seitens der Schulbuchautor*innen selbst voraussetzt und diesbezüglich ganz offensichtlich noch deutlicher Nachholbedarf besteht.[23] Auch für Schulbuchverlage, die sich schon allein aus ökonomischen Interessen in ihrer Programmgestaltung an dem Rahmen orientieren (müssen), den – neben zum Beispiel auch möglichen KMK-Richtlinien – je länderspezifische Schulgesetze, Schulbuchzulassungsverfahren und vor allem Lehrpläne abstecken, muss es offensichtlich deutlich „attraktiver" werden, auf Gendersensibilität in Schulbüchern zu achten. Da rechtliche Rahmungen, die sie formulierenden Akteur*innen und umsetzenden Institutionen selbst durch gesellschaftliche Diskurse und Veränderungen geprägt sowie politischen Verhältnissen unterworfen sind, ist abschließend das Desiderat zu formulieren, eine gendersensible Gestaltung von (Mathematik)Schulbüchern (wieder oder noch) deutlicher auf die Agenda

23 An dieser Stelle sei ausdrücklich (noch einmal) betont: Eine bloße Forderung nach einer verstärkten Beteiligung von Schulbuchautorinnen „löst" dieses Problem nicht. Die meisten in unsere Analyse integrierten Mathematikschulbücher wurden von mehreren Autor*innen verfasst/herausgegeben, d.h. ausschlaggebend ist eben gerade nicht das Geschlecht der Autor*innen, sondern deren Genderkompetenz.

bildungspolitischer Diskurse und Forderungen der schulbezogenen Geschlechterforschung zu stellen. Hierfür gilt es im Speziellen auch verstärkt um Unterstützung seitens Fachdidaktiker*innen und Lehrkräfte zu werben, die bislang vielleicht die Notwendigkeit und Bedeutung einer gendersensiblen Gestaltung von Mathematikschulbüchern noch nicht gesehen haben.

Einen großen Handlungsbedarf und zugleich eine besondere Herausforderung sehen wir in der Entwicklung von konkreten Beispielen zur Integration von Mathematikerinnen (oder allgemeiner von heterogenen Akteur*innen in der Mathematik), um endlich das männlich konnotierte Bild der Mathematik in Schulbüchern durchbrechen und Schüler*innen auch vielfältigere Identifikationsmodelle „anbieten" zu können. So verbinden wir mit unserem Beitrag auch die abschließende Einladung an Lehrkräfte, Fachdidaktiker*innen, Mathematiker*innen und Geschlechterforscher*innen, diese Herausforderung anzunehmen, entsprechende Ideen und/oder Unterrichtsmaterialien zu entwickeln und zu teilen.

Literatur

Adam, V. & Kleine, M. (2016). *mathe.delta: Mathematik für das Gymnasium. Berlin Brandenburg*. C.C. Buchner.

Bakenhus, S. et al. (2014). *Mathematik 8*. Westermann.

Bamberger, R. (1998). *Zur Gestaltung und Verwendung von Schulbüchern: Mit besonderer Berücksichtigung der elektronischen Medien und der neuen Lernkultur.* Pädagogischer Verlag.

Barcoe, Y. (2018). *Genderstereotype oder Gendersensibilität in Mathematikschulbüchern: Eine exemplarische Untersuchung.* Unveröffentlichte Masterarbeit. Freie Universität Berlin.

Barzel, B. et al. (2016). *mathewerkstatt 9.* Cornelsen.

Baumert, T. et al. (2017). Mathematik *Sekundo 7. Für integrierte Sekundarschulen Berlin und Brandenburg*. Westermann.

Biallas, I. et al. (2011). *Mathematik - na klar! 8. Berlin*. Duden.

Bittner, M. (2015). Die Ordnung der Geschlechter in Schulbüchern: Heteronormativität und Genderkonstruktionen in Englisch- und Biologiebüchern. In F. Schmidt, A.-C. Sondelmayer & U. B. Schröder (Hg.*), Selbstbestimmung und Anerkennung sexueller und geschlechtlicher Vielfalt. Lebenswirklichkeiten, Forschungsergebnisse und Bildungsbausteine* (S. 247–260). VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Böer, H. et al. (2014). *mathe live 8. Mathematik für Sekundarstufe I*. Ausgabe W. Ernst Klett.

Böer, H. et al. (2015). *mathe live 9E. Mathematik für Sekundarstufe I*. Ausgabe N. Ernst Klett.

Böer, H. et al. (2017). *mathe live 7. Mathematik für Sekundarstufe I*. Ausgabe W. Ernst Klett.

Curdes, B. (2007). Genderbewusste Mathematikdidaktik. In B. Curdes, S. Marx, U. Schleier & H. Wiesner (Hg.), *Gender lehren - Gender lernen in der Hochschule: Konzepte und Praxisberichte* (S. 99–125*).* BIS-Verlag.

Ebner, M. & Schön, S. (2012). Editorial zum Schwerpunktthema "Wandel von Lern- und Lehrmaterialien". *Bildungsforschung*, *9*(1), 1–10.

Eid, W. et al. (2012). *Mathematik - na klar! 9. Berlin*. Duden.

Finsterwald, M. (2008). Geschlechtsrollenstereotype in Schulbüchern. In M. Hempel (Hg.), *Fachdidaktik und Geschlecht* (S. 27–36). Vechtaer fachdidaktische Forschungen und Berichte, 16. Hochschule Vechta.

Glötzner, J. (1982). Heidi häkelt Quadrate, Thomas erklärt die Multiplikation: Rollenklischees in neuen Mathematikschulbüchern. In I. Brehmer (Hg.), *Sexismus in der Schule: Der heimliche Lehrplan der Frauendiskriminierung* (S. 154–158). Beltz.

Griesel, H. et al. (2016). *Elemente der Mathematik 8. Berlin Brandenburg*. Schroedel/Westermann.

Griesel, H. et al. (2017). *Elemente der Mathematik 7. Berlin Brandenburg*. Schroedel/Westermann.

Griesel, H. et al. (2017). *Elemente der Mathematik 9. Berlin Brandenburg*. Schroedel/Westermann.

Haugk, K. & Liebchen, M. (2018). *Formel 9. Mathematik. Berlin Brandenburg*. C.C. Buchner.

Hunze, A. (2003). Geschlechtertypisierung in Schulbüchern. In W. Cornelißen, A. Hunze, H. Roisch & M. Stürzer (Hg.), *Geschlechterverhältnisse in der Schule* (S. 53–82). Leske & Budrich.

Hußmann, S. et al. (2015). *mathewerkstatt 8.* Cornelsen.

Jochim, V. (2014). *"Weil Mädchen anders lernen": Die Konstruktion von Geschlecht in Grundschulbüchern und ihre heteronormative Wirkmächtigkeit.* Eckert. Working Papers 2014/9.

Kaiser-Messmer, G. (1994). Analyse ausgewählter Schulbücher unter geschlechtsspezifischen Aspekten. In K. Müller (Hg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1994. Vorträge auf der 28. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 28. Februar bis 4. März 1994 in Duisburg* (S. 171–174). Franzbecker.

Lammok, A. (2019). *Geschlechtsstereotypen oder Gendersensibilität in Mathematikschulbüchern? Eine vergleichende Analyse ausgewählter Schulbücher der Russischen Föderation und Deutschland für die Klassenstufe 7*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Freie Universität Berlin.

Langner, I. (1987). Frauen: Randfiguren des Lebens: Untersuchung zur Darstellung von Mädchen und Frauen in Mathematikbüchern. *Pädagogik heute*, *3*, 20–22.

Lenze, M. et. al. (2012). *Mathematik SEKUNDO 7 PLUS. Für differenzierende Schulformen*. Schroedel.

Lenze, M. et. al. (2012). *Mathematik SEKUNDO 8 PLUS. Für differenzierende Schulformen*. Schroedel.

Lenze, M. et. al. (2013). *Mathematik SEKUNDO 8. Für differenzierende Schulformen*. Schroedel.

Lenze, M. et. al. (2013). *Mathematik SEKUNDO 9 PLUS. Für differenzierende Schulformen*. Schroedel.

Lenze, M. et. al. (2015). *Mathematik SEKUNDO 9. Für differenzierende Schulformen*. Schroedel.

Lergenmüller, A. & Schmidt, G. (2014). *Mathematik Neue Wege 7*. Schroedel.

Liebchen, M. (2016). *Formel 7. Mathematik. Berlin Brandenburg.* C.C. Buchner.

Lindner, V. & Lukesch, H. (1994). *Geschlechtsrollenstereotype im deutschen Schulbuch: Eine inhaltsanalytische Untersuchung von Schulbüchern für Grund-, Haupt- und Realschulen der Fächer Deutsch, Mathematik, Heimat- und Sachkunde sowie Religionslehre in Bayern, Nordrhein-Westfalen und der ehemaligen DDR zugelassen im Zeitraum von 1970 bis 1992.* Roderer.

Lopatecki, C. & Lüking, I. (1989). *Bescheiden, sittsam und rein? Rollenklischees in Mathematik-Schulbüchern für die Sekundarstufe I.* Schriftenreihe der Bremischen Zentralstelle für die Verwirklichung der Gleichberechtigung der Frau. Selbstverlag.

Mischau, A. & Bohnet, K. & Martinovic, S. (2016). Bodenwischen, Datenanalyse, Frauengeschichte und Mathematik. In M. Kampshoff & C. Wiepcke (Hg.), *Vielfalt geschlechtergerechten Unterrichts: Ideen und konkrete Umsetzungsbeispiele für die Sekundarstufen* (S. 37–79). ePubli.

Mischau, A. & Eilerts, K. (2018). Modellieren im Mathematikunterricht gendersensibel gestalten. In K. Eilerts & K. Skutella (Hg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5. Ein ISTRON-Band für die Grundschule* (S. 125–142). Springer Spektrum.

Mischau, A. & Martinović, S. (2017). Mathematics Deconstructed?! Möglichkeiten und Grenzen einer dekonstruktivistischen Perspektive im Schulfach Mathematik am Beispiel von Schulbüchern. In N. Balzter; F. C. Klenk & O. Zitzelsberger (Hg.), *Queering MINT. Impulse für eine dekonstruktive Lehrer_innenbildung* (S. 89–108). Verlag Barbara Budrich.

Moser, F. & Hannover, B. (2014). How gender fair are German schoolbooks in the twenty-first century? An analysis of language and illustrations in schoolbooks for mathematics and German. *European Journal of Psychology of Education*, *29*(3), 387–407.

Nikolaus, L. (2015). *Geschlechterstereotype im Mathematikschulbuch? Eine vergleichende Analyse ausgewählter Mathematikschulbücher der Sekundarstufe I von 1990 bis heute.* Unveröffentlichte Masterarbeit. Freie Universität Berlin.

Niederdrenk-Felgner, C. (1995). Textaufgaben für Mädchen – Textaufgaben für Jungen? Das Problem der „Gleichberechtigung" aus Sicht einer Schulbuchautorin. *Mathematik lehren*, *68*, 54–57.

Öhler, J. (1991). *Mädchen und Mathematikunterricht: Anregungen und Materialvorschläge zu einem mädchenfreundlichen Mathematikunterricht*. Arbeitsberichte aus der Forschungsstelle für Frauenfragen der Pädagogischen Hochschule Flensburg (Bd. 3). Selbstverlag.

Ott, C. (2014). Geschlechtsidentität(en) im Mathebuch. Was die Sprache in Bildungsmedien über ihre Gesellschaft verrät. In C. Theurer, C. Siedenbiedel & J. Budde (Hg.), *Lernen und Geschlecht* (S. 241–254). Prolog-Verlag.

Ott, C. (2016). 40 Jahre Geschlechterforschung zu Rechen- und Mathematikbüchern. Forschungsparadigmen und Methodik im Wandel. In: A. Blunck, R. Motzer & N. Oswald (Hg.) *Mathematik und Gender* Frauen in der Mathematikgeschichte – Mädchen und Mathematikunterricht heute (S. 65-72). Franzbecker

Pallack, A. (2017). *Fundamente der Mathematik 8. Ausgabe B.* Gymnasium. Cornelsen.

Pallack, A. (2018). *Fundamente der Mathematik 7. Ausgabe B.* Gymnasium. Cornelsen.

Pallack, A. (2018). *Fundamente der Mathematik 9. Ausgabe B*. Gymnasium. Cornelsen.

Paseka, A. (2004). Schulbücher als Instrumente des „geheimen Lehrplans“ in der Schule. In Heinrich-Böll-Stiftung, Regionalbüro Sarajevo (Hg.). *Die Gender-Perspektive im Unterricht. Möglichkeiten und Anregungen*; (36–41).Sarajevo

Preinsberger, A. & Weißkircher, E. (1997). Mathematikschulbücher - eine aktuelle Untersuchung. In L. Lassnig & A. Paseka (Hg.), *Schule weiblich - Schule männlich: zum Geschlechterverhältnis im Bildungswesen* (Bd. 17, S. 132–143). Studien Verlag.

Schneider, C. & Tanzberger, R. & Traunsteiger, B. (2011). *Unterrichtsprinzip "Erziehung zur Gleichstellung von Frauen und Männern": Informationen und Anregungen zur Umsetzung in der Volksschule* (2. Aufl.). Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur.

Tanzberger, R. (2003). Mädchen und Mathematik - (k)ein Widerspruch?!: Verein zur Erarbeitung feministischer Erziehungs- und Unterrichtsmodelle. *Koryphäe - Medium für feministische Naturwissenschaft und Technik*, *33*, 33–36.

Thomas, S. (1999). *Analyse neuerer Schulbücher unter geschlechtsspezifischen Aspekten – dargestellt an Mathematiklehrbüchern für das 5. und 10. Schuljahr*. Duehrkohp und Radicke.

Voglmayr, S. (2009). *Geschlechterrollenstereotype in Französisch - Lehrbüchern für den österreichischen Schulunterricht: Eine sprachwissenschaftliche Schulbuchanalyse.* Diplomarbeit.

Weinbrenner, P. (1995). Grundlagen und Methodenprobleme sozialwissenschaftlicher Schulbuchforschung. In R. Olechowski (Hg.), *Schulbuchforschung: Schule - Wissenschaft - Politik* (Bd. 10, S. 21–45). Peter Lang.

Wennekers, U. (2016). *Zahlen und Größen 7. Berlin Brandenburg*. Cornelsen.

Wennekers, U. (2016). *Zahlen und Größen 8. Berlin Brandenburg*. Cornelsen.

Wennekers, U. (2018). *Zahlen und Größen 9. Berlin Brandenburg*. Cornelsen.

Anhang

Tabelle 1: Geschlechterverhältnis bei erwachsenen Personen nach Jahrgängen und Schulbüchern

7. Klasse	B71		B72		C71		C72		K71		S71		S72		SW71		W71	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Frauen	20	22,5%	28	34,6%	40	32,8%	45	37,8%	29	34,9%	72	33,3%	28	28,3%	56	32,0%	70	34,3%
Männer	69	77,5%	53	65,4%	82	67,2%	74	62,2%	54	65,1%	144	66,7%	71	71,7%	119	68,0%	134	65,7%
Gesamt	89	100%	81	100%	122	100%	119	100%	83	100%	216	100%	99	100%	175	100%	204	100%
8. Klasse	C81		C82		C83		D81		K81		S81		S82		SW81		W81	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Frauen	46	27,5%	27	32,9%	24	30,4%	14	30,4%	36	34,3%	66	39,5%	70	36,5%	31	20,5%	32	40,5%
Männer	121	72,5%	55	67,1%	55	69,6%	32	69,6%	69	65,7%	101	60,5%	122	63,5%	120	79,5%	47	59,5%
Gesamt	167	100%	82	100%	79	100%	46	100%	105	100%	167	100%	192	100%	151	100%	79	100%
9. Klasse	B91		C91		C92		C93		D91		K91		S91		S92		SW91	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Frauen	22	26,5%	2	5,4%	29	31,5%	30	27,8%	2	4,3%	32	28,8%	88	36,8%	94	40,7%	10	17,5%
Männer	61	73,5%	35	94,6%	63	68,5%	78	72,2%	44	95,7%	79	71,2%	151	63,2%	137	59,3%	47	82,5%
Gesamt	83	100%	37	100%	92	100%	108	100%	46	100%	111	100%	239	100%	231	100%	57	100%

Tabelle 2: Geschlechterverhältnis bei Kindern/Jugendlichen nach Jahrgängen und Schulbüchern

7. Klasse	B71		B72		C71		C72		K71		S71		S72		SW71		W71	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Mädchen	103	39,6%	156	37,4%	302	47,6%	139	39,9%	179	51,4%	319	48,5%	130	50,6%	212	42,0%	331	50,6%
Jungen	157	60,4%	261	62,6%	332	52,4%	209	60,1%	169	48,6%	339	51,5%	127	49,4%	293	58,0%	323	49,4%
Gesamt	260	100%	417	100%	634	100%	348	100%	348	100%	658	100%	257	100%	505	100%	654	100%
8. Klasse	C81		C82		C83		D81		K81		S81		S82		SW81		W81	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Mädchen	151	47,3%	101	38,0%	307	46,8%	60	47,2%	123	46,8%	179	43,4%	303	46,8%	105	43,2%	151	51,0%
Jungen	168	52,7%	165	62,0%	349	53,2%	67	52,8%	140	53,2%	233	56,6%	345	53,2%	138	56,8%	145	49,0%
Gesamt	319	100%	266	100%	656	100%	127	100%	263	100%	412	100%	648	100%	243	100%	296	100%
9. Klasse	B91		C91		C92		C93		D91		K91		S91		S92		SW91	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Mädchen	156	40,7%	54	37,2%	67	48,9%	251	47,1%	32	42,1%	58	57,4%	147	44,0%	147	43,9%	49	38,9%
Jungen	227	59,3%	91	62,8%	70	51,1%	282	52,9%	44	57,9%	43	42,6%	187	56,0%	188	56,1%	77	61,1%
Gesamt	383	100%	145	100%	137	100%	533	100%	76	100%	101	100%	334	100%	335	100%	126	100%

Tabelle 3: Geschlechterverhältnis bei Erwerbstätigen nach Jahrgängen und Schulbüchern

7. Klasse	B71		B72		C71		C72		K71		S71		S72		SW71		W71	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Frauen	3	14,3%	8	21,6%	2	8,7%	7	17,1%	5	17,2%	8	23,5%	8	21,1%	17	20,5%	20	29,0%
Männer	18	85,7%	29	78,4%	21	91,3%	34	82,9%	24	82,8%	26	76,5%	30	78,9%	66	79,5%	49	71,0%
Gesamt	21	100%	37	100%	23	100%	41	100%	29	100%	34	100%	38	100%	83	100%	69	100%
8. Klasse	C81		C82		C83		D81		K81		S81		S82		SW81		W81	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Frauen	3	8,8%	2	9,5%	6	31,6%	0	0,0%	7	23,3%	2	22,2%	12	30,8%	1	4,8%	5	26,3%
Männer	31	91,2%	19	90,5%	13	68,4%	4	100%	23	76,7%	7	77,8%	27	69,2%	20	95,2%	14	73,7%
Gesamt	34	100%	21	100%	19	100%	4	100%	30	100%	9	100%	39	100%	21	100%	19	100%
9. Klasse	B91		C91		C92		C93		D91		K91		S91		S92		SW91	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Frauen	5	20,0%	1	7,7%	2	8,7%	7	30,4%	0	0,0%	8	34,8%	2	11,1%	3	10,7%	3	30,0%
Männer	20	80,0%	12	92,3%	21	91,3%	16	69,6%	8	100%	15	65,2%	16	88,9%	25	89,3%	7	70,0%
Gesamt	25	100%	13	100%	23	100%	23	100%	8	100%	23	100%	18	100%	28	100%	10	100%

Tabelle 4: Geschlechterverhältnis für Bereich „Haushalt/Familie“ nach Jahrgängen und Schulbüchern

7. Klasse	B71		B72		C71		C72		K71		S71		S72		SW71		W71	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Frauen	6	40,0%	5	38,5%	0	0,0%	7	50,0%	3	50,0%	10	66,7%	1	33,3%	7	58,3%	12	63,2%
Männer	9	60,0%	8	61,5%	0	0,0%	7	50,0%	3	50,0%	5	33,3%	2	66,7%	5	41,7%	7	36,8%
Gesamt	15	100%	13	100%	0	0%	14	100%	6	100%	15	100%	3	100%	12	100%	19	100%
8. Klasse	C81		C82		C83		D81		K81		S81		S82		SW81		W81	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Frauen	11	55,0%	2	40,0%	2	66,7%	0	0,0%	8	61,5%	7	35,0%	6	60,0%	9	64,3%	0	0,0%
Männer	9	45,0%	3	60,0%	1	33,3%	0	0,0%	5	38,5%	13	65,0%	4	40,0%	5	35,7%	0	0,0%
Gesamt	20	100%	5	100%	3	100%	0	0%	13	100%	20	100%	10	100%	14	100%	0	0%
9. Klasse	B91		C91		C92		C93		D91		K91		S91		S92		SW91	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Frauen	3	75,0%	0	0,0%	2	28,6%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%	9	60,0%	10	50,0%	1	100%
Männer	1	25,0%	0	0,0%	5	71,4%	1	100%	1	100%	1	100%	6	40,0%	10	50,0%	0	0,0%
Gesamt	4	100%	0	0%	7	100%	1	100%	1	100%	1	100%	15	100%	20	100%	1	100%

Tabelle 5: Liste der Berufe/Tätigkeitsbereiche (auch allgemeiner bezahlte Tätigkeiten) nach Geschlecht (auf der Basis von 12 Büchern)

Frauen	Männer		
Lehrerin (18x)	Lehrer (22x)	Mathematiker (3x)	Handwerker (3x)
Mathematiklehrerin	Mathematiklehrer (2x)	Statistiker	Maurer (2x)
Verkäuferin (7x)	Verkäufer (9x), Kaufmann (1x)	Notar	Zimmermann
Erzieherin (3x)	Erzieher	Grafiker (2x)	Dachdecker
Friseurin (3x)	Friseur (2x)	Archäologe	Bauarbeiter (4x)
Landwirtin (2x)	Landwirt/Bauer (6x)	Architekt (3x)	Monteur
Hausmeisterin	Hausmeister	Wissenschaftler	Fliesenleger
Kellnerin	Kellner (2x)	Jurist	Industriebauarbeiter
Bürokraft	Bürokraft	Ingenieur (2x)	Maler (2x)
Bankkauffrau/-angestellte (3x)	Bankangestellter	Redakteur/Journalist (2x)	Arbeiter (3x)
Näherin	Näher	Baumeister	Meister
Ärztin	Arzt	Limonadenhersteller	Glaser
Schulleiterin	Schulleiter (2x)	Waschmittelhersteller	Pflasterer
Autohändlerin	Autohändler/-verkäufer (4x)	Chips-Hersteller	Dreher
Tierpflegerin (2x)	Tierpfleger	Getränkeautomatenhersteller	Fensterbauer
Produktdesignerin	Produktdesigner (1), Designer (1)	Computerhersteller	Lehrling (4x)
Nachhilfelehrerin	Nachhilfelehrer (3x)	Pralinenhersteller	(Landschafts)Gärtner (3x)
Künstlerin	Künstler/Kunstmaler (4x), Kunsthandwerker (1x)	Hantelhersteller	Holzfäller
Tischlerin	Tischler (4x)	Hersteller	Landvermesser (2x)
Schwimmerin	Schwimmer (2x)	Internetanbieter	Forstarbeiter (2x)
Chefin	Chef (3x)	Reiseveranstalter	LKW-Fahrer/Speditionsfahrer (7x)
Trainerin	Trainer (4x)	Telefonanbieter	Fahrschullehrer
Blumenhändlerin	Händler (4x)	Fotoanbieter	Prospektausträger
Goldschmiedin	Fahrradhändler	Musikanbieter	Arbeitgeber (2x)
Bürokauffrau (2x)	Holzhändler	Mobilfunkanbieter	Freizeitparkbesitzer
Chefärztin	Teehändler	Kajakfahrer (2x)	Hotelbesitzer
Ladenbesitzerin	Großhändler (2x)	Surflehrer	Präsident (2x), Herrscher (1x)
Schulsekretärin	Obsthändler	Torwart (2x)	Bürgermeister
Schreinerin	Hotelfachmann	Jugendwart	Lieferant
Marktfrau	Küchenchef	Taucher (2x)	Museummitarbeiter
(Industrie)Kauffrau (3x)	Koch/Schulkoch (4x)	Sportschütze	Musiker
(Zahn)Medizinische Fachangestellte (2x)	Eiskonditor (3x)	Schiedsrichter	Höhlenforscher
Fachkraft im Gastgewerbe	Konditor	Läufer	Zauberer (5x)
Kauffrau für Bürokommunikation	Bäcker (5x)	(Bi)Athlet (3x)	Expeditionsmitglieder
Kanzleiangestellte	Polizist (3x), Sheriff (1x)	Fußballtrainer	Autovermieter
Aushilfskraft	(Schiffs)Kapitän (3x)	Fallschirmspringer (5x)	Veranstalter
Krankenschwester	Matrose (2x)	Spielleiter	Detektiv (26x)
Apothekerin (2x)	Optiker	Arbeitnehmer	Makler
Mitarbeiterin (2x)	Taxifahrer	Angestellter	Reinigungskraft
Zeitungsausträgerin	Betreuer (2x)	Mitarbeiter einer Firma (20x)	Sonstiges (6)

Tabelle 6: Liste der Haushalts-/Familientätigkeiten nach Geschlecht (auf der Basis von 12 Büchern)

Frauen		Männer	
kauft ein (8x)	stellt Wäschespinne auf	kauft ein (8x)	baut Thermofenster ein
tankt (5x)	richtet die Wohnung ein	tankt (3x)	baut auf der Terrasse
nimmt Kredit auf (4x)	berechnet Grundstückgröße	nimmt Kredit auf (3x)	baut ein Blumenbeet
zahlt Rechnungen (3x)	zahlt Urlaub	zahlt Rechnungen (2x)	repariert Dach
kauft ein Auto (2x)	legt Girokonto an	kauft ein Auto (2x)	baut ein Swimmingpool
legt Sparkonto an (2x)	legt Geld an	legt Sparkonto an	skizziert Fenster
kocht (2x)	schließt Vertrag ab	kocht	sucht nach Schrebergarten
kauft ein Haus (2x)	kauft Fliesen	kauft ein Grundstück	zahlt Steuern
kauft einen Esstisch		kauft einen Kleiderschrank	kauft einen Grill
bepflanzt Terrasse		Gartenarbeit (2x)	trägt Steine
schließt Stromvertrag ab		holt Angebote für Strom ein	kauft ein Tablet
		leiht Geld aus	kauft eine Mikrowelle
		zahlt Miete	

Tabelle 7: Frauen nach Bereichen und Jahrgangsstufen

	Frauen Gesamt	davon Erwerbstätige		davon Bereich Haushalt/Familie		davon Mütter		davon Sonstiges	
	#	#	%	#	%	#	%	#	%
Jahrgang 7	388	78	20,1%	51	13,1%	21	5,4%	238	61,3%
Jahrgang 8	346	38	11,0%	45	13,0%	21	6,1%	242	69,9%
Jahrgang 9	309	31	10,0%	25	8,1%	13	4,2%	240	77,7%
Gesamt	1043	147	14,1%	121	11,6%	55	5,3%	720	69,0%

Tabelle 8: Männer nach Bereichen und Jahrgangsstufen

	Männer Gesamt	davon Erwerbstätige		davon Bereich Haushalt/Familie		davon Väter		davon Sonstiges	
	#	#	%	#	%	#	%	#	%
Jahrgang 7	800	297	37,1%	46	5,8%	18	2,3%	439	54,9%
Jahrgang 8	722	158	21,9%	40	5,5%	22	3,0%	502	69,5%
Jahrgang 9	695	140	20,1%	25	3,6%	13	1,9%	517	74,4%
Gesamt	2217	595	26,8%	111	5,0%	53	2,4%	1458	65,8%

Tabelle 9: Geschlechterverhältnis bei bedeutenden Persönlichkeiten nach Jahrgängen und Schulbüchern (absolute Zahlen)

7. Klasse	Frauen	davon Mathematikerinnen	Männer	davon Mathematiker	Gesamt	davon Mathematiker*innen
B71	0	0	8	5	8	5
B72	0	0	2	0	2	0
C71	1	0	8	3	9	3
C72	2	1	21	5	23	6
K71	0	0	3	2	3	2
S71	0	0	12	1	12	1
S72	0	0	5	2	5	2
SW71	0	0	10	6	10	6
W71	4	0	12	3	16	3
8. Klasse	**Frauen**	**davon Mathematikerinnen**	**Männer**	**davon Mathematiker**	**Gesamt**	**davon Mathematiker*innen**
C81	0	0	9	2	9	2
C82	0	0	9	6	9	6
C83	0	0	1	1	1	1
D81	0	0	7	4	7	4
K81	0	0	10	5	10	5
S81	0	0	5	2	5	2
S82	0	0	6	4	6	4
SW81	0	0	29	16	29	16
W81	0	0	4	1	4	1
9. Klasse	**Frauen**	**davon Mathematikerinnen**	**Männer**	**davon Mathematiker**	**Gesamt**	**davon Mathematiker*innen**
B91	1	0	8	2	9	2
C91	0	0	7	3	7	3
C92	1	0	12	4	13	4
C93	2	0	24	17	26	17
D91	0	0	17	14	17	14
K91	0	0	10	4	10	4
S91	0	0	10	9	10	9
S92	0	0	11	9	11	9
SW91	0	0	13	7	13	7

Tabelle 10: Liste der genannten/ dargestellten Mathematiker*innen nach Geschlecht (auf der Basis von 18 Büchern)

Mathematikerinnen	Mathematiker	
Emmy Noether	Adam Ries (2x)	Hippasos von Metapont (1x)
	Ahmes (3x)	Jacob Köbel (1x)
	Al-Chwarizmi (2x)	James A. Garfield (2x)
	Archimedes von Syrakus (8x)	James Gregory (1x)
	Babylonier (5x)	Jemshid A-Kashi (3x)
	Bhâskara (1x)	Johann Heinrich Lambert (1x)
	Blaise Pascal (3x)	Karl Weierstraß (1x)
	Bonaventura Francesco	Leonardo de Pisa (Fibonacci)
	Brahmagupta (1x)	Leonhard Euler (4x)
	Carl Friedrich Gauß (3x)	Liu Hui (2x)
	Claudius Ptolemäus (3x)	Ludolf van Ceulen (1x)
	David Hilbert (1x)	Marin Mersenne (1x)
	Diophantos von Alexandria (2x)	Michael Stifel (1x)
	Eratosthenes (2x)	Pierre Simon de Laplace (3x)
	Euklid (2x)	Platon (2x)
	Ferdinand von Lindemann (1x)	Pythagoras von Samos (8x)
	François Viète (4x)	Richard Dedekind (2x)
	Georg Alexander Pick (1x)	Simon Stevin (1x)
	Georg Cantor (1x)	Sokrates (2x)
	Gert Mittring (2x)	Thales von Milet (8x)
	Gottfried Wilhelm Leibniz (1x)	Trainer von Dirk Nowitzki (1x)
	Henri Perigal (1x)	Waclaw Sierpinski (1x)
	Heron aus Alexandria (1x)	Zu Chongchi (1x)

„Frauen in der Geschichte der Mathematik“ – eine Lehrveranstaltung für Studierende des Lehramts

Andrea Blunck

In diesem Beitrag soll die Lehrveranstaltung „Frauen in der Geschichte der Mathematik“ für Studierende des Lehramts vorgestellt werden. Die Darstellung ist als Anregung für Lehrende gedacht, die eine sich sowohl mit Mathematik als auch mit Genderaspekten der Mathematik beschäftigende Lehrveranstaltung gestalten möchten.

1. Gender-Lehrveranstaltungen in der Mathematik

Seit 2003 biete ich am Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg Lehrveranstaltungen zu Mathematik und Gender an (siehe Blunck 2006, 2008, 2009, 2020). Gender-Lehrveranstaltungen in der Mathematik oder Gender-Themen innerhalb „normaler“ Mathematikveranstaltungen können meines Erachtens einen Beitrag dazu leisten, den Studierenden ein breiteres, vielfältigeres Bild der Mathematik zu vermitteln. Sie bieten den Studierenden die Gelegenheit, ihr Fach aus einer ungewohnten Perspektive, quasi „von außen“, zu betrachten. Ferner kann die Beschäftigung z.B. mit Frauen in der Mathematik die Motivation gerade von Studentinnen für ihr Fach steigern. Dies zeigt auch das folgende Zitat einer Hamburger Mathematikstudentin:[24]

> „Also ja, Emmy Noether zum Beispiel, die hat in Algebra mit dem Noetherschen Ring…. Da habe ich mich dann zu Hause auch mal hingesetzt und ein bisschen was über sie gelesen, weil ich es halt interessant fand und auch gut fand, dass da auch mal eine Frau war und nicht immer nur Männer.“

In diesem Beitrag steht eine Veranstaltung für Studierende des Lehramts im Mittelpunkt. Gerade für diese Studierendengruppe ist es meines Erachtens wichtig, die Mathematik in vielfältiger Weise kennenzulernen. Die Betrachtung von Mathematik aus verschiedenen Blickwinkeln kann dazu beitragen, dass die Studierenden eine positivere Beziehung zur Mathematik entwickeln und sich selber etwas mehr der Mathematik zugehörig fühlen. Die Veranstaltung „Frauen in der Geschichte der Mathematik“ hat zudem auch das Ziel, mathematische Inhalte zu vermitteln bzw. aufzufrischen und zu vertiefen.

2. Die Lehrveranstaltung „Frauen in der Geschichte der Mathematik“

Frauen aus der Geschichte der Mathematik sind in der Öffentlichkeit und auch bei Studierenden der Mathematik kaum bekannt. In Schulbüchern kommen sie so gut wie gar nicht vor (siehe dazu den Beitrag von Mischau & Orhan in diesem Band). Durch meine seit 2003 mehrfach in immer wieder leicht veränderter Form gehaltene Vorlesung „Frauen in der Geschichte der Mathematik“ versuche ich dieser Unkenntnis entgegenzuwirken.

Die Vorlesung war ursprünglich sowohl für Studierende der Mathematik als auch für Studierende anderer Fächer mit dem Nebenfach Gender Studies gedacht und enthielt zunächst nur wenig mathematische Inhalte. Mittlerweile ist die Vorlesung im Lehramt angesiedelt, im Modul „Vertiefung gesellschaftliche Bezüge der Mathematik“ aus dem Wahlpflichtbereich des Masterstudiengangs Lehramt für Primarstufe und Sekundarstufe I. Sie enthält jetzt sehr viel mehr Mathematik und es gehört auch eine begleitende Übung mit mathematischen Aufgaben

24 aus der Studie „Prozesse des Doing Gender in der Mathematik“, Leitung: Anina Mischau (Bielefeld), 2003/04

dazu. Damit kann die Veranstaltung als gleichberechtigt zu Veranstaltungen aus Modulen wie z.B. „Vertiefung Algebra und Zahlentheorie“ oder „Vertiefung Angewandte Mathematik“ gewählt werden.

Ein wichtiges Ziel der Veranstaltung „Frauen in der Geschichte der Mathematik“ ist es, den Studierenden einen Einblick in die Geschichte der Mathematik zu geben. Angehende Mathematiklehrkräfte sollen erkennen, dass die Mathematik eine Geschichte hat, dass die Mathematik sich in der Geschichte immer wieder verändert hat und sich auch heute noch verändert, dass heute verwendete mathematische Konzepte erst entwickelt werden mussten, und zwar von Menschen in ihrem jeweiligen historischen und sozialen Kontext. Ein besonderes Anliegen ist es dabei, den Fokus auf den Anteil von Frauen an der Geschichte der Mathematik zu richten.

In der Vorlesung werden Leben und Werk ausgewählter Mathematikerinnen von der Antike bis ins 20. Jahrhundert vorgestellt und eingeordnet. Die Studierenden sollen erfahren, dass Frauen wesentliche Beiträge zur Mathematik geliefert haben und noch heute liefern. Des Weiteren wird in der Vorlesung die Stellung von Frauen in der Wissenschaft in den verschiedenen Epochen thematisiert und in den historischen Zusammenhang gestellt. Es werden also sowohl einzelne Frauen und ihre Mathematik behandelt als auch, darüber hinaus gehend, die Geschichte der Frauenbildung und die aus der Struktur der wissenschaftlichen Institutionen erwachsenden Schwierigkeiten für Frauen im Bildungssystem dargestellt und diskutiert.

Vor allem aber werden in der Vorlesung und besonders in der Übung auch mathematische Inhalte vermittelt, die angelehnt sind an die Forschung einiger der behandelten Frauen. Die Studierenden hatten, wenn sie die Veranstaltung besuchen, im Bachelorstudium bereits sechs Semester Mathematik, allerdings auf eher niedrigem Niveau. Die in der Vorlesung und Übung behandelten mathematischen Inhalte dürfen somit nicht zu anspruchsvoll sein. Mein Anliegen bei der Auswahl der mathematischen Themen ist es, Inhalte aus dem Bachelorstudium wieder aufzugreifen, so dass die Studierenden diese auffrischen und festigen können und gleichzeitig etwas über ihre historische Entwicklung erfahren.

Vorlesung und Übung werden auch in Blunck (2013) und Blunck (2020) vorgestellt. Weitere Informationen wie Literaturangaben und Links finden sich auf der zur Vorlesung gehörigen Webseite (Blunck 2019). Im vorliegenden Beitrag soll ein Schwerpunkt auf der behandelten Mathematik liegen.

3. Die Vorlesung, die behandelten Mathematikerinnen

In der Vorlesung werden die folgenden Mathematikerinnen vorgestellt:

- *Hypatia von Alexandria* (370-415), unterrichtete Mathematik, Astronomie, Philosophie, schrieb Kommentare u.a. zu Werken von Apollonios und Diophant
- *Emilie du Châtelet* (1706-1749), übersetzte Newtons *Principia Mathematica* ins Französische, wobei sie die Leibnizsche Notation benutzte und damit einen eigenen besonderen Beitrag leistete
- *Maria Gaetana Agnesi* (1718-1799), schrieb das erste Analysis-Lehrbuch in italienischer Sprache
- *Sophie Germain* (1776-1831), lieferte Beiträge zur Zahlentheorie und zur Elastizitätstheorie
- *Ada Lovelace* (1815-1852), die „erste Programmiererin“, schrieb Programme für eine niemals gebaute programmierbare Rechenmaschine
- *Christine Ladd-Franklin* (1847-1930), erste US-Amerikanerin, die eine Doktorarbeit in Mathematik verfasste – den Doktortitel erhielt sie jedoch erst Jahrzehnte später
- *Sofja Kowalewskaja* (1850-1891), erste Frau, die in Deutschland in Mathematik promovierte, und erste Mathematikprofessorin weltweit

- *Charlotte A. Scott* (1858-1931), erste Britin, die in Mathematik promovierten, später Professorin in den USA
- *Grace Chisholm Young* (1868-1944), promovierte in Göttingen, verfasste eigene Publikationen und wirkte an fast allen der über 200 Arbeiten ihres Ehemanns W.H. Young mit
- *Emmy Noether* (1882-1935), eine der wichtigsten Personen der Mathematik des 20. Jahrhunderts, Begründerin der modernen Algebra
- *Ruth Moufang* (1905-1977), wurde 1957 als erste Frau in Deutschland zur ordentlichen Professorin für Mathematik berufen, legte bereits 1936 ihre Habilitationsschrift vor, jedoch wurde ihr von den Nazis die Zulassung zur öffentlichen Lehrprobe und somit die Venia legendi verweigert

Die Vorlesungen bestehen erstens aus Folienvorträgen zu den historischen Aspekten, zu den Lebensläufen der Frauen und zur Kurzdarstellung ihrer Mathematik. Zweitens werden detailliertere Darstellungen mathematischer Inhalte ganz klassisch an der Tafel ausgeführt, hierbei steht oft die später in der Übung benötigte Mathematik im Vordergrund. In jeder Vorlesung kommen beide Präsentationsformen vor. Einige aus meiner Sicht interessante Inhalte sollen nun exemplarisch etwas ausgeführt werden.

In der ersten Vorlesung geht es (nach einer Einführung ins Thema) um Hypatia von Alexandria. Zuerst wird kurz die Situation von Wissenschaft, Mathematik und Frauenbildung in der Antike dargestellt. Etwas vertieft behandele ich die Frage nach der Quellenlage: wissenschaftliche Texte sind in der Regel nur in Abschriften von Abschriften von Abschriften erhalten, die Urheberschaft ist meist unklar (siehe O'Connor & Robertson 1999), wichtige Texte wurden im Laufe der Zeit immer wieder „kommentiert", d.h. abgeschrieben und mit neuen Inhalten ergänzt. Gemäß der als gesichert anzusehen Quellen zu Hypatia (siehe Deakin 1994) schrieb diese Kommentare zu Diophant, Apollonios, Ptolemaios. Was sie aber genau schrieb, ist unbekannt. Wegen der guten Anschlussfähigkeit an die Vorkenntnisse der Studierenden wird in der ersten Vorlesung die Arithmetik des Diophant vorgestellt, anschließend wird dies in der Übung vertieft. Diophants Werk bestand aus einer Sammlung von Einzelbeispielen, deren Lösungen jeweils allgemeine Zugänge zu den Problemstellungen ermöglichen. In der Vorlesung bearbeite ich mit den Studierenden das folgende Beispiel:

> Man finde zwei Zahlen, so dass ihre Summe und ihr Produkt zwei gegebene Zahlen ergeben. Das Quadrat der Hälfte der Summe der zu findenden Zahlen soll dabei deren Produkt um ein Quadrat übertreffen. Angenommen, die Summe der Zahlen sei 20 Einheiten und ihr Produkt 96.

Hier sei angemerkt, dass nur positive rationale Zahlen betrachtet werden. Dies ist der Grund für die Forderung im zweiten Satz der Aufgabe, wie im Folgenden deutlich werden wird.

Seien a und b die gesuchten Zahlen, sei s die gegebene Summe und sei p das gegebene Produkt. Diophants Lösungsweg bestand darin, zunächst die Hälfte der Differenz der beiden gesuchten Zahlen zu bestimmen. Diese nennen wir x.

Mit Hilfe von x lassen sich a und b leicht berechnen: Es ist $a + b = s$ und $a - b = 2x$. Addition bzw. Subtraktion dieser beiden Gleichungen liefert $a = \frac{1}{2}s + x$ und $b = \frac{1}{2}s - x$.

Dann folgt $p = ab = \left(\frac{1}{2}s\right)^2 - x^2$. Es ist also $x^2 = \left(\frac{1}{2}s\right)^2 - p$ die im zweiten Satz der Aufgabe genannte Differenz des Quadrats der Hälfte der Summe und dem Produkt. Um eine Lösung x im Bereich der positiven rationalen Zahlen zu finden, ist die von Diophant formulierte Forderung nötig, dass diese Differenz eine Quadratzahl sein soll.

Im Beispiel ist $x^2 = 10^2 - 96 = 4$, also $x = 2$ und somit $a = 12$ und $b = 8$.

In der Übung werden zwei weitere, ähnlich einfache Aufgaben von Diophant behandelt. Entnommen wurden die Aufgaben, Diophants Lösungsmethoden sowie Weiteres zur Arithmetik des Diophant dem Buch von Peiffer & Dahan-Dalmédico (1994).

In der vierten Vorlesung stelle ich den Lebensweg von Sophie Germain dar. Hierbei lese ich einzelne Abschnitte aus dem populärwissenschaftlichen Buch von Singh (2000) vor, welches in einem Kapitel die Biographie Germains behandelt. Sophie Germain kam als junges Mädchen zur Mathematik, als sie während der französischen Revolution die elterliche Wohnung nicht verlassen durfte und Bücher über Mathematikgeschichte las. Später, nachdem 1794 die École Polytechnique gegründet worden war, ergab sich für Germain die Gelegenheit, unter einem männlichen Pseudonym („Antoine-Auguste Le Blanc“) Vorlesungsmaterialien zu bekommen und Lösungen zu Übungsaufgaben einzureichen. Dadurch fiel sie dem Mathematikprofessor Joseph-Louis Lagrange auf, der später ihr Mentor wurde.

Germain forschte zunächst zur Zahlentheorie, insbesondere zur Fermatschen Vermutung, also zu der um 1630 von Pierre de Fermat formulierten Aussage, dass die Gleichung

$$(*)\ x^n + y^n = z^n$$

für $n > 2$ keine ganzzahligen Lösungen mit $x, y, z \neq 0$ besitzt. An dieser Stelle folgt in der Vorlesung eine kurze Darstellung der Geschichte der Fermatschen Vermutung und von Germains Beitrag zu ihrem Beweis. Hierbei orientiere ich mich an Ribenboim (1999). Zur Vorbereitung der zugehörigen Übungen werden anschließend einige Vorüberlegungen an der Tafel ausgeführt:

- Für $n = 2$ gibt es viele ganzzahlige Lösungen von $(*)$, z.B. gilt $3^2 + 4^2 = 5^2$. Solche Lösungen heißen pythagoräische Zahlentripel. Nach dem Satz von Pythagoras können sie als Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks interpretiert werden.
- Für $x = 0$ oder $y = 0$ oder $z = 0$ gibt es ebenfalls viele ganzzahlige Lösungen.
- Wenn das ganzzahlige Zahlentripel (x, y, z) eine Lösung von $(*)$ wäre, dann auch das durch Kürzen durch den größten gemeinsamen Teiler von (x, y, z) entstehende Tripel. Um die Fermatsche Vermutung zu beweisen, reicht es also, die Nichtexistenz teilerfremder Lösungen zu zeigen.
- Angenommen, $(*)$ hätte eine ganzzahlige Lösung. Ist n durch eine ungerade Primzahl p teilbar, so hätte dann auch $x^p + y^p = z^p$ eine ganzzahlige Lösung (dies wird in der Übung behandelt).
- Der Fall, dass $(*)$ eine ganzzahlige Lösung hat und n nicht durch eine ungerade Primzahl teilbar ist, kann nicht eintreten, denn dann wäre $n = 2^k$ für ein $k > 1$ und somit durch 4 teilbar, so dass auch $x^4 + y^4 = z^4$ eine ganzzahlige Lösung hätte (dies wird ebenfalls in der Übung behandelt). Dass dies nicht stimmt, war bereits zu Germains Zeit bekannt.
- Somit reicht es, die Fermatsche Vermutung für den Fall zu beweisen, dass $n = p$ eine ungerade Primzahl ist.

Nach diesen mathematischen Ausführungen an der Tafel wird in der Vorlesung der Briefwechsel behandelt, den Germain ab 1804 mit Carl-Friedrich Gauß führte (zunächst ebenfalls als Le Blanc).

4. Die Übungen

Die Themen der elf Übungsblätter sind an den Arbeitsgebieten einiger der in der Vorlesung behandelten Frauen orientiert, wobei darauf geachtet wurde, dass an das Vorwissen der Studierenden angeknüpft wird. Jedes Übungsblatt beginnt mit einer Kurzbeschreibung des Themas und der zugehörigen Mathematikerin. Die Kurzbeschreibungen der Übungen vom Sommersemester 2019 werden im Folgenden (in zum Teil gekürzter oder überarbeiteter Form) wiedergegeben. Sie geben einen Eindruck davon, was in den Übungen behandelt wird. Es finden sich Anknüpfungen an verschiedene Inhalte des Bachelorstudiums wie Elementare Zahlentheorie, Lineare Algebra, Geometrie und Analysis.

Blatt 1: Thema: Arithmetik des Diophant. Hypatia von Alexandria (um 400 n. Chr.) schrieb Kommentare zur Arithmetika (Zahlentheorie) des Diophant von Alexandria (um 250 n. Chr.). In diesem 13-bändigen Werk werden Lösungswege für viele verschiedene zahlentheoretische Aufgaben vorgestellt. Wir behandeln einige Originalaufgaben aus Band II der Arithmetika. Des Weiteren betrachten wir lineare diophantische Gleichungen, wie sie heute in der elementaren Zahlentheorie studiert werden.

Blatt 2: Thema: Kegelschnitte. Hypatia von Alexandria schrieb einen Kommentar zum Werk Konika (d.h. Kegelschnitte) des Apollonios von Perge (um 200 v. Chr.). In diesem Werk wird bei der Definition eines Kegelschnitts erstmals ein fester Kegel zu Grunde gelegt; um die drei Kegelschnitttypen zu erhalten, wird die Ebene variiert. Bevor Apollonios diese Definition formulierte, wurde üblicherweise eine Ebene fest gewählt und dann der Kegel variiert.

Blatt 3: Thema: Die Kurve von Agnesi. Maria Gaetana Agnesi (Mailand, 1718-1799) schrieb das erste Analysis-Lehrbuch in italienischer Sprache. Darin betrachtet sie u.a. auch die nach ihr benannte Kurve, und zwar als Beispiel zur Analytischen Geometrie und als Beispiel für die Berechnung von Wendepunkten. Die auch Versiera oder Witch of Agnesi genannte Kurve wurde schon um 1700 von Guido Grandi studiert.

Blatt 4: Thema: Pythagoräische Tripel. Sophie Germain (Paris, 1776-831) forschte zu Fragen der Zahlentheorie und der Elastizitätstheorie. Im Bereich der Zahlentheorie lieferte sie verschiedene Beiträge zum Beweis der Fermatschen Vermutung. Diese wurde 1630 von Pierre de Fermat (1601-1665) aufgestellt, nachdem er in Diophants Arithmetika über die ganzzahligen Lösungen der Pythagoras-Gleichung gelesen hatte.

Blatt 5: Thema: Sophie Germain und die Fermatsche Vermutung. Sophie Germain lieferte u.a. Beiträge zum Beweis der Fermatschen Vermutung. Diese wurde erst 1994 von Andrew Wiles (geb. 1953) bewiesen. Nach Germain benannt sind ferner die Sophie-Germain-Primzahlen: Eine Primzahl p heißt Sophie-Germain-Primzahl, wenn auch $2p + 1$ eine Primzahl ist.

Blatt 6: Thema: Differenzenfolgen. Ada Byron Lovelace (1815-1852) gilt als „erste Programmiererin“. Sie arbeitete zusammen mit Charles Babbage (1791-1871), dem „Vater des Computers“. Seine Difference Engine berechnete Folgenglieder polynomialer Folgen mit Hilfe von Differenzenfolgen. Lovelace beschreibt dies in ihrer Abhandlung über die ebenfalls von Babbage entwickelte, mit Lochkarten programmierbare Analytical Engine. Für diese niemals gebaute Maschine schrieb Lovelace Programme.

Blatt 7: Thema: Differentialgleichungen. Die Russin Sofja Kowalewskaja (1850-1891) war die erste Frau im 19. Jahrhundert, die in Mathematik promovierte (1874 in Göttingen), und die erste Professorin für Mathematik (ab 1884 an der Universität Stockholm). Ihr Arbeitsgebiet war die Analysis, insbesondere die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Differentialgleichungen beschreiben oft Vorgänge in der Natur, wie z.B. die von Kowalewskaja studierte Kreiselbewegung.

Blatt 8: Thema: Potenzreihen. Sofja Kowalewskaja studierte in ihrer Dissertation partielle Differentialgleichungen mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes, d.h. sie betrachtete Funktionen, die sich als Potenzreihe darstellen lassen.

Blatt 9: Thema: Sätze aus der Geometrie. Christine Ladd-Franklin (1847-1930) war die erste US-Amerikanerin, die (im Jahr 1883) eine Dissertation in Mathematik schrieb; ihre Universität verlieh jedoch damals keine akademischen Grade an Frauen, so dass sie den Doktortitel erst 1926 verliehen bekam. Das Thema ihrer Dissertation war die Algebra der Logik, sie publizierte aber auch zu vielen anderen Themen, u.a. zur Geometrie.

Blatt 10: Thema: Ringe und Ideale. Emmy Noether (1882-1935) wird die „Mutter der Algebra“ genannt. Sie begründete die moderne Algebra, wie sie heute an den Universitäten Standard ist. In den 1920er Jahren befasste sie sich vor allem mit Ring- und Idealtheorie. Eine bestimmte

Klasse von Ringen ist nach ihr benannt („noethersche Ringe“). Emmy Noether gehört zu den wichtigsten Personen der Mathematik des 20. Jahrhunderts.

Blatt 11: Thema: Lineare Darstellungen von Gruppen. Neben der Ring- und Idealtheorie war die Darstellungstheorie ein weiteres Arbeitsgebiet von Emmy Noether.

Jedes Übungsblatt enthält Präsenz- und Hausaufgaben. Die Präsenzaufgaben dienen zur Einführung in das jeweilige Thema und zur Vorbereitung der Hausaufgaben, sie werden in der Übungsstunde unter meiner Betreuung in Gruppen bearbeitet.

Die Blätter 3 und 6 (s. Anhang) sollen nun etwas ausführlicher vorgestellt werden.

In Blatt 3 geht es um die Kurve von Agnesi. Deren punktweise Konstruktion wird vor der Übung bereits in der Vorlesung durchgeführt und findet sich dann auf dem Übungsblatt noch einmal verschriftlicht wiedergegeben.

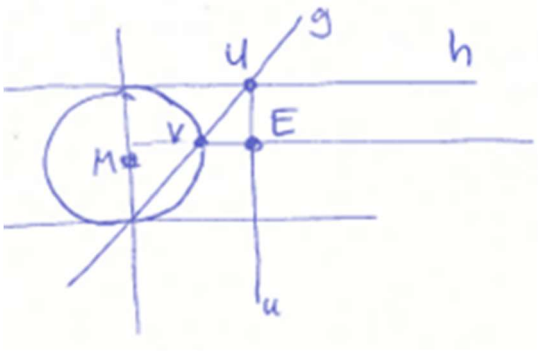


Abb. 1: Konstruktion des zur Geraden g gehörigen Punktes E der Kurve von Agnesi

Die Studierenden sollen in der Präsenzübung einige Punkte konstruieren und dann die Koordinaten der Punkte der Kurve berechnen. Dies erfolgt im Wesentlichen durch Verwenden von Geraden- und Kreisgleichungen. Anschließend sollen die Studierenden zeigen, dass die Kurve der Graph einer auf dem Blatt angegebenen Funktion ist. Mit dieser Darstellung können nun in der Hausaufgabe die Wendepunkte der Kurve mit den bekannten Methoden aus der Analysis bestimmt werden. Damit werden in dieser Übung genau die mathematischen Bereiche behandelt, für die auch Agnesi in ihrem Lehrbuch die nach ihr benannte Kurve benutzt hat (analytische Geometrie und Berechnung von Wendepunkten). Die Studierenden wiederholen dabei verschiedene Inhalte aus dem Bachelorstudium (aus der Linearen Algebra und der Analysis).

Thema von Blatt 6 sind Differenzenfolgen. Ada Lovelace kam mit Charles Babbage in Kontakt anlässlich einer von ihm durchgeführte Präsentation seiner Difference Engine. Dabei berechnete diese Maschine innerhalb von 5 min die ersten 60 Glieder der Folge $n^2 + n + 41$. Die Maschine verwendet dabei die Differenzenmethode, die darauf basiert, dass bei einer Folge der Gestalt $an^2 + bn + c$ die zweite Differenzenfolge stets konstant ist. Die Differenzenmethode wird in der Vorlesung erläutert und anhand von Babbages Beispiel vorgeführt.

Hierbei notiere ich unter den Gliedern $a_0, a_1, \ldots$ der Folge $a_n = n^2 + n + 41$ die Glieder der ersten Differenzenfolge $d_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n$ und darunter die Glieder der zweiten Differenzenfolge $d_n^{(2)}$.

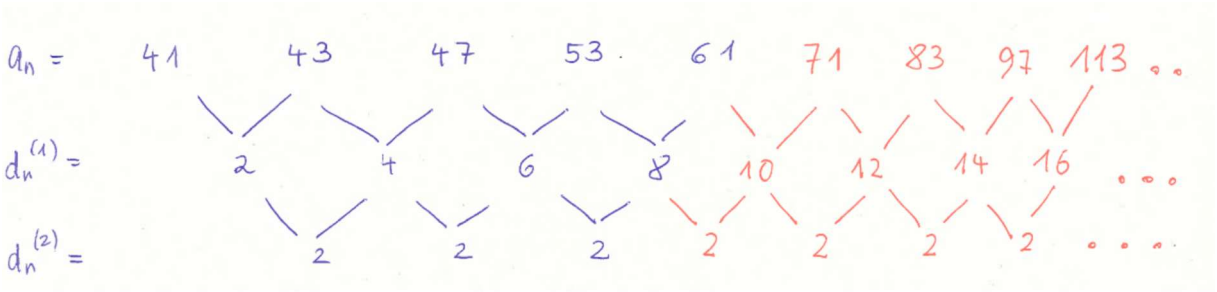


Abb. 2: Erste und zweite Differenzenfolge von $a_n = n^2 + n + 41$

Man erkennt nach wenige Schritten (blau), dass die zweite Differenzenfolge konstant ist (dies wird in der Vorlesung auch noch allgemein bewiesen), und kann dann (rot) die nächsten Folgenglieder schnell ausrechnen, ohne das Polynom $n^2 + n + 41$ auswerten zu müssen.

In der Präsenzübung wird diese Methode von den Studierenden zunächst ebenfalls für Beispielfolgen durchgeführt und anschließend in einer „Anwendungsaufgabe" verwendet. Die Anregung zu dieser und einer ähnlichen von mir als Hausaufgabe gestellten Aufgabe entstammt dem Buch von Perl (1978), welches noch viele weitere mathematische Aktivitäten enthält, die – mehr oder weniger eng – mit dem Werk einiger bedeutender Mathematikerinnen verknüpft sind.

Die Veranstaltung „Frauen in der Geschichte der Mathematik" wird mit einer Klausur abgeschlossen. Diese besteht aus zwei Teilen: Der mathematische Teil, der 75% ausmacht, besteht aus vier Aufgaben, die sich auf den Stoff der Übungen beziehen. Der historische Teil umfasst zwei Aufgaben, in den jeweils einige kurze Fragen zu einer der behandelten Mathematikerinnen zu beantworten sind.

5. Rück- und Ausblick

Im Rahmen der Lehrveranstaltungsevaluation stelle ich üblicherweise die folgende auf die Vorlesung zugeschnittene individuelle Frage:

> „Halten Sie es für sinnvoll, sich im Rahmen des Lehramtsstudiums Mathematik mit Frauen in der Geschichte der Mathematik zu befassen? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?".

Die Antworten sind in der Regel bis auf wenige Ausnahmen positiv. Im Wintersemester 2012/13 nahmen 40 Studierende an der Befragung teil. Als Begründung, warum die Beschäftigung mit Frauen in der Geschichte der Mathematik sinnvoll ist, wurde u.a. Folgendes geäußert:

> „da sie in den anderen Veranstaltungen viel zu kurz kommen und der Eindruck entsteht, dass es keine bedeutenden Frauen gab/gibt"
>
> „die Männer kennt man ja schon"
>
> „da im LAPSI Studiengang viele Frauen studieren"

Nach jedem Durchgang werden Vorlesung und Übung überarbeitet. Dabei versuche ich, Anregungen der Studierenden aus der Evaluation aufzugreifen. So werden der Stoffumfang und besonders die vielen verschiedenen mathematischen Themen von den Studierenden meist eher kritisch gesehen. Da ich von dem Grundkonzept der Themenvielfalt nicht abrücken möchte, versuche ich, den Studierenden beim Schwierigkeitsgrad entgegen zu kommen. Einige Aufgaben habe ich dahingehend vereinfacht, dass gewisse Aussagen nicht mehr bewiesen, sondern nur noch an Hand von Beispielen überprüft werden müssen.

Für die nähere Zukunft beabsichtige ich eine größere Überarbeitung der mathematischen Inhalte. Das Lehramtsstudium in Hamburg wurde grundlegend verändert. Das Lehramt Primarstufe und Sekundarstufe I läuft aus, genauso wie das Lehramt an Gymnasien. Seit 2020/21 gibt es stattdessen die neuen Studiengänge Lehramt an Grundschulen (mit Mathematik als

Pflichtfach) und Lehramt für die Sekundarstufen I und II. Es wäre meines Erachtens wünschenswert, wenn „Frauen in der Geschichte der Mathematik“ für beide Lehramtstypen (jeweils im Master) wählbar wäre. Dies würde voraussichtlich u.a. eine Differenzierung beim Schwierigkeitsgrad der Übungen erfordern.

Literatur:

Blunck, A. (2006): Gender-Lehrveranstaltungen in der Mathematik. In R. Bauer & H. Götschel (Hrsg.): Gender in Naturwissenschaften. Ein Curriculum an der Schnittstelle der Wissenschaftskulturen (S. 85-93). Mössingen-Talheim: Talheimer.

Blunck, A. (2008): Research on Mathematics and Gender: Implications for Teaching. In M. Chionidou-Moskofoglou et al. (Hrsg.): Promoting Equity in Maths Achievement. The Current Discussion (S. 127-132). Barcelona: Publicacions i Edicions Universitat de Barcelona.

Blunck, A. (2009): Mathematik und Gender – Ideen für die Lehre. In H. Götschel & D. Niemeyer (Hrsg.): Gender in Naturwissenschaften in Forschung und Lehre (S. 115-132). Mössingen-Talheim: Talheimer.

Blunck, A. (2013): Frauen in der Geschichte der Mathematik – Bericht über eine Lehrveranstaltung. In N. Hille & B. Unteutsch (Hrsg.): Gender in der Lehre. Best-Practice-Beispiele für die Hochschule (S. 111-119). Opladen: Budrich UniPress.

Blunck, A. (2019): Frauen in der Geschichte der Mathematik. http://www.math.uni-hamburg.de/home/blunck/frauen (zuletzt aufgerufen: 10.5.2021).

Blunck, A. (2020): Gender als Thema in Mathematik-Lehrveranstaltungen. In: H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 1401-1404). Münster: WTM-Verlag.

Deakin, M.A.B. (1994): Hypatia and Her Mathematics. In: Amer. Math. Monthly 101: 234-243.

Mischau, A. & Orhan, K. (2021): „Wind of Change“? – Mathematikschulbücher im Fokus. In diesem Band.

O'Connor, J.J. & Robertson, E.F. (1999), How do we know about Greek mathematics?, *MacTutor History of Mathematics*, University of St Andrews, Scotland https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Greek_sources_1/ (zuletzt aufgerufen: 10.5.2021).

Peiffer, J. & Dahan-Dalmédico, A. (1994): Wege und Irrwege – Eine Geschichte der Mathematik. Basel: Birkhäuser.

Perl, T. (1978): Math Equals. Biographies of Women Mathematicians and Related Activities. Menlo Park: Addison-Wesley.

Ribenboim, P. (1999): Fermat’s Last Theorem for Amateurs. New York: Springer.

Singh, S. (2000): Fermats letzter Satz. München: dtv.

Übungen zur Vorlesung „Frauen in der Geschichte der Mathematik“

Andrea Blunck

SoSe 2019 **Blatt 3**

Thema: Die Kurve von Agnesi. MARIA GAETANA AGNESI (Mailand, 1718–1799) schrieb das erste Analysis-Lehrbuch in italienischer Sprache. Darin betrachtet sie u.a. auch die nach ihr benannte Kurve, und zwar als Beispiel zur Analytischen Geometrie und als Beispiel für die Berechnung von Wendepunkten. Die auch *Versiera* oder *Witch of Agnesi* genannte Kurve wurde schon um 1700 von GUIDO GRANDI studiert.

Erinnerung: Konstruktion der Punkte der Kurve von Agnesi
Sei k der Kreis mit Mittelpunkt $M = (0,1)$ und Radius 1. Auf dem Kreis liegen u.a. die Punkte $O = (0,0)$ und $P = (0,2)$. Sei h die Parallele zur x-Achse durch P.
Sei g irgendeine von der x-Achse verschiedene Gerade durch O. Es sei V der von O verschiedene zweite Schnittpunkt von g und k, und es sei $U = g \cap h$. Es sei v die Parallele zur x-Achse durch V und u die Parallele zur y-Achse durch U. Der Punkt $E = v \cap u$ ist ein Punkt der Kurve von Agnesi.

Präsenzaufgaben am 15.4.2019

(P5) Sei g eine Gerade wie oben und E der zugehörige Punkt auf der Kurve von Agnesi.

(a) Bestimmen Sie mit einer kleinen Skizze den Punkt E für den Fall, dass g die y-Achse ist.

(b) Sei nun g verschieden von der y-Achse. Dann hat g also die Gleichung $y = mx$ mit Steigung $m \neq 0$. Zeigen Sie: Die Koordinaten (x_E, y_E) des Punktes E sind gegeben durch

$$x_E = \frac{2}{m} \quad \text{und} \quad y_E = \frac{2m^2}{1+m^2}.$$

Hinweis: Berechnen Sie zuerst die benötigten Koordinaten von V bzw. U. Für die Berechnung von V benötigen Sie die Kreisgleichung von k.

(P6) Wir wollen zeigen: Die Kurve von Agnesi ist der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{8}{4+x^2}$$

Zeigen Sie dazu:

(a) Der Punkt P (welcher nach (P5)(a) auf der Kurve liegt) liegt auf dem Graphen.

(b) Jeder Punkt $E = (x_E, y_E)$ (mit x_E, y_E wie in (P5)(b)) liegt auf dem Graphen.

(c) Jeder von P verschiedene Punkt des Graphen läßt sich mit einem geeigneten $m \neq 0$ als $E = (x_E, y_E)$ (wie in (P5)(b)) darstellen (und liegt deshalb auf der Kurve von Agnesi).

Hausaufgaben zum 29.4.2019

(H6) Lösen Sie folgende Aufgaben zur Kurve von Agnesi: **(5P)**

(a) Berechnen Sie die Ableitungen f' und f'' der Funktion f aus (P6). (2.5P)

(b) Bestimmen Sie mit (a) die Wendestellen der Kurve von Agnesi. (2.5P)
Hinweis: Benutzen Sie dabei die folgende Kennzeichnung von Wendestellen: Bei $x_0 \in \mathbb{R}$ liegt eine Wendestelle von f vor, wenn $f''(x_0) = 0$ ist und f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen wechselt (d.h. links von x_0 ist f'' positiv und rechts negativ, oder umgekehrt).

(H7) Die **verallgemeinerte** Kurve von Agnesi wird wie oben konstruiert, jedoch mit einem Kreis mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $M = (0, r)$. **(5P)**

(a) Sei g eine Gerade durch O, die verschieden von der y-Achse ist. Dann hat g also die Gleichung $y = mx$ mit Steigung $m \neq 0$. Berechnen Sie analog zu (P5)(b) die Koordinaten (x_E, y_E) des zugehörigen Punktes E auf der verallgemeinerten Kurve von Agnesi. (2.5P)

(b) Zeigen Sie analog zu (P6), dass die verallgemeinerten Kurve von Agnesi der Graph der folgenden Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist: (2.5P)

$$f(x) = \frac{8r^3}{4r^2 + x^2}$$

Übungen zur Vorlesung „Frauen in der Geschichte der Mathematik“

Andrea Blunck

SoSe 2019 **Blatt 6**

Thema: Differenzenfolgen. ADA BYRON LOVELACE (1815–1852) gilt als „erste Programmiererin“. Sie arbeitete zusammen mit CHARLES BABBAGE (1791–1871), dem „Vater des Computers“. Seine *Difference Engine* berechnete Folgenglieder polynomialer Folgen mit Hilfe von Differenzenfolgen. LOVELACE beschreibt dies in ihrer Abhandlung über die ebenfalls von BABBAGE entwickelte, mit Lochkarten programmierbare *Analytical Engine*. Für diese niemals gebaute Maschine schrieb LOVELACE Programme.

Präsenzaufgaben am 13.5.2019

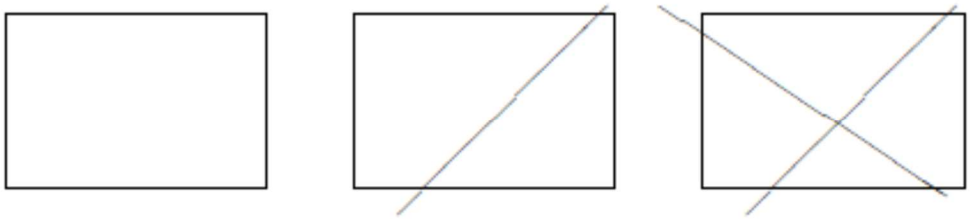
(P12) Gemäß Vorlesung ist eine Folge (a_n) genau dann durch ein Polynom vom Grad ≤ 2 gegeben (hat also die Gestalt $a_n = an^2 + bn + c$ mit festen $a, b, c \in \mathbb{R}$), wenn ihre zweite Differenzenfolge konstant ist.

Es sei bekannt, dass die folgenden Folgen beide durch ein Polynom vom Grad ≤ 2 gegeben sind. Berechnen Sie mit der Differenzenmethode jeweils die nächsten drei Folgenglieder.

(a) $1, 4, 10, 19, \ldots$ (b) $2, 9, 15, 20, \ldots$

(P13) Gegeben sei ein rechteckiges Papierstück. Sei a_n die maximale Anzahl von Teilstücken, in welche sich das Papierstück durch n gerade Schnitte zerlegen läßt.

Beispiele:



$a_0 = 1$ $a_1 = 2$ $a_2 = 4$

(a) Es sei bekannt, dass die Folge (a_n) durch ein Polynom vom Grad ≤ 2 gegeben ist. Bestimmen Sie mit der Differenzenmethode die Folgenglieder a_3, a_4, a_5. Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse für a_3 und a_4 jeweils durch eine Skizze.

(b) Man kann geometrisch zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(*) \quad a_{n+1} = a_n + n + 1$$

(i) Überprüfen Sie $(*)$ für $n = 0, 1, \ldots, 4$ anhand Ihrer Ergebnisse aus (a).

(ii) Zeigen Sie mittels $(*)$, dass die zweite Differenzenfolge von (a_n) konstant ist. (Damit gilt dann die in (a) benutzte Aussage, dass (a_n) durch ein Polynom vom Grad ≤ 2 gegeben ist.)

Hausaufgaben zum 20.5.2019

(H12) Wir sagen, die Folge (a_n) sei durch ein Polynom vom Grad ≤ 3 gegeben, wenn es $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. **(4.5P)**

(a) Beweisen Sie: Ist die Folge (a_n) durch ein Polynom vom Grad ≤ 3 gegeben, so ist die zugehörige dritte Differenzenfolge $(d_n^{(3)})$ mit

$$d_n^{(3)} := d_{n+1}^{(2)} - d_n^{(2)}$$

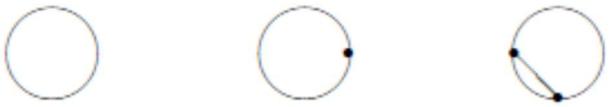
konstant.
Hinweis: Sie können die Aussagen der Vorlesung verwenden. (2.5P)

(b) Es sei bekannt, dass die folgenden Folgen beide durch ein Polynom vom Grad ≤ 3 gegeben sind. Berechnen Sie mit der Differenzenmethode jeweils das nächste Folgenglied. (2P)

(i) $1, 8, 24, 48, \ldots$
(ii) $3, 2, 2, 1, \ldots$

(H13) Wir betrachten einen festen Kreis. Es sei a_n die Anzahl aller Verbindungsgeraden zwischen n Punkten auf dem Kreis. **(5.5P)**

Beispiele:



$a_0 = 0$ $a_1 = 0$ $a_2 = 1$

(a) Es sei bekannt, dass die Folge (a_n) durch ein Polynom vom Grad ≤ 2 gegeben ist. Bestimmen Sie mit der Differenzenmethode die Folgenglieder a_3, a_4, a_5. Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse jeweils durch eine Skizze. (3P)

(b) Man kann zeigen (s. Zusatzaufgabe), dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(*) \quad a_{n+1} = a_n + n$$

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion und mit Hilfe von $(*)$:
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$. (2.5P)
(*Bemerkung:* Somit ist also (a_n) durch ein Polynom vom Grad ≤ 2 gegeben.)

Zusatzaufgabe (2 Bonus-Punkte) Beweisen Sie $(*)$ aus Aufgabe (H13).

Der „Matilda-Effekt“ in der Philosophiegeschichte der Mathematik
Beispiele, Herausforderungen und Perspektiven

Andrea Reichenberger

Abstract

Dank der historischen Frauen*- und Genderforschung verfügen wir heute über ein fundiertes, breites und tiefes Wissen über akademische Frauenkarrieren und -barrieren in der Mathematik und ihrer Geschichte. Für einige mathematische Disziplinen ist gut untersucht, dass und aus welchen Gründen Forscherinnen für Innovationsphasen eine herausragende Rolle spielten und warum sie dennoch „übersehen“ wurden. Demgegenüber ist die Frauen*- und Genderforschung in der Philosophiegeschichte der Mathematik bis heute ein Desiderat. Der Aufsatz macht auf dieses Desiderat aufmerksam. Anhand von zwei historischen Fallstudien sollen Herausforderungen diskutiert und Perspektiven eröffnet werden, um Beiträge von Frauen sachlich fundiert und problemorientiert in die Philosophie der Mathematik zu integrieren. Bei den Fallstudien handelt es sich um eine Dissertation von Maria Nicetia Holling (1894–1967) im Philosophischen Jahrbuch der Görres-Gesellschaft und um ein populärwissenschaftliches Buch von Rózsa Péter (1905–1977).

1. Der Matilda-Effekt: Mathematik- und Philosophiegeschichte als männliche Erinnerungskultur

Zu Beginn der 1980er Jahre des 20. Jahrhunderts durchforstete die amerikanische Wissenschaftshistorikerin Margaret W. Rossiter das Nachschlagewerk American Men of Science (jetzt American Men and Women of Science). Was Rossiter darin fand, überraschte sie: In dem Nachschlagewerk wurden über 500 Wissenschaftlerinnen genannt, die zu ihren Lebzeiten anerkannt und rezipiert, in der wissenschaftshistorischen Tradierung jedoch nicht (mehr) erwähnt worden sind. Um dieser Tatsache Ausdruck zu verleihen wählte Rossiter die Bezeichnung „Matilda-Effekt“ zu Ehren von Matilda Joslyn Gage (1826–1889), einer Aktivistin, Freidenkerin, Autorin und Pionierin der amerikanischen Soziologie. Matilda Joslyn Gage gilt als Vorreiterin im Kampf um die Gleichberechtigung der Frau. Wie Gage kritisierte Rossiter die klassische Wissenschaftsgeschichte als eine männlich dominierte Erinnerungskultur (Rossiter 1993).

Beiträge von Wissenschaftlerinnen und Forscherinnen sichtbar zu machen ist seit jeher eines der erklärten Ziele der historischen Frauenforschung. Sich mit der Geschichte der Frauen in der Mathematik zu befassen trägt zum besseren Verständnis der gegenwärtigen Situation von Frauen in der Mathematik bei. Eine solche Forschung liefert zudem wichtige Impulse für eine gendergerechte Zukunftsgestaltung.

In der Philosophie der Mathematik halten sich hartnäckig Vorbehalte gegenüber einer Ideologisierung der Philosophie durch Frauen- und Geschlechterforschung. Auch ist die Meinung weit verbreitet, Frauen- und Genderforschung sei Aufgabe der praktischen oder politischen Philosophie. Dadurch entstehen Vorstellungen von der Abwesenheit von Frauen, auch dort, wo es nicht zutrifft. Und so werden Kanonisierungen geschaffen, die nicht verbalisierte, tiefliegende stereotype Denkmuster von Generation zu Generation „vererben". Diesem Denkmuster zu begegnen stellt die Philosophie der Mathematik vor Herausforderungen und eröffnet Perspektiven, die im Folgenden anhand zweier Beispiele deutlich gemacht werden sollen.

2. Der Beitrag von Maria Nicetia Holling

Im Jahr 1930 legte die Franziskanerin Schwester Maria Nicetia (Geburtsname „Anna") Holling (1894–1967) an der Universität Münster ihre Doktorarbeit vor.[25] Diese wurde im gleichen Jahr unter dem Titel „Die Frage nach der Existenz der Nichteuklidischen Geometrie und ihre Beantwortung in den Schriften der beiden Bolyai" im Philosophischen Jahrbuch der Görres-Gesellschaft veröffentlicht. Begutachter und Betreuer der Dissertation war der Theologe, Mathematiker und Philosoph Heinrich Scholz.

Gleich im ersten Absatz macht Holling deutlich, dass es ihr um „den mathematischen Gehalt der neuen Geometrie" geht, exemplifiziert am Beispiel der Untersuchungen des ungarischen Mathematikers János (Johann) Bolyai (1802–1860) über das Parallelenaxiom.[26] Bolyai gebührt das Verdienst als einer der ersten einen Beweis der Unabhängigkeit des Parallelenpostulats vorgelegt zu haben. Bolyais Beweis beruht auf folgender Grundidee (vgl. Abb. 1): Sei AB das vom Punkt A auf die Gerade a gefällte Lot (Punkt A liegt nicht auf der Geraden a; m ist eine sich um den Punkt A in Pfeilrichtung drehende Gerade, die in der betreffenden Ebene liegt. Diese Gerade

25 Eine kurze biographische Information zu Holling findet sich in dem von Andrea E. Abele, Helmut Neunzert und Renate Tobies herausgegebenen Buch *Traumjob Mathematik* (2004, 36). Tobies ist meines Wissens die einzige, die sich bisher mit der Dissertation Hollings im Rahmen ihrer biographischen Forschungen zu Mathematiker*innen befasst hat. Hollings Arbeit wird allerdings in der von Elisabeth Boedeker 1935 verfassten Übersicht sämtlicher in Deutschland entstandenen (nichtmedizinischer) Doktorarbeiten von Frauen zwischen 1908 und 1933 erwähnt (Boedeker 1935, 7).

26 Am 3. November 1823 schrieb János Bolyai aus Temesvár an seinem Vater Farkas (Wolfgang), Professor für Mathematik am evangelisch-reformierten Kollegium in Marosvásárhely (heute Târgu Mureş in Rumänien, deutsch Neumarkt am Mieresch), dass er die Lösung des Parallelenaxioms gefunden habe (Stäckel 1895, 241). Der Vater veröffentlichte den lateinischen Text seines Sohnes mit der Lösung für das Parallelenproblem im Jahre 1832 mit dem Titel *Appendix, Scientiam spatii absolute veram exhibens*, als Anhang seines mathematischen Handbuchs *Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos*. Im Vorwort seines Buches dankt Stäckel *József Kürschák* (Budapest) und Ludwig Schlesinger (Klausenburg und Gießen) für die Unterstützung der langjährigen und langwierigen Vorbereitungsarbeiten. József Kürschák hat 1903 János Bolyai's Appendix im lateinischen Original herausgeben. Die Ausgabe ist heute als Digitalisat der TUGraz DIGITAL Library (digitalisierte Beständen der Universitätsbibliothek der TU Graz) frei zugänglich. Die URL lautet: https://diglib.tugraz.at/appendix-scientiam-spatii-absolute-veram-exhibens-1903 [09.06.2021]. Als die von ihr benutzte Quellengrundlage nennt Holling die Geometrischen Untersuchungen von Wolfgang und Johann Bolyai (Stäckel 1913). Diese wurden 1913 von Paul Stäckel in deutscher Übersetzung herausgegebenen. Bereits 1832 hatte Johann Bolyai eine deutsche Bearbeitung unter dem Titel Raumlehre, unabhängig von der (a priori nie entschieden werdenden) Wahr- oder Falschheit des berüchtigten XI. Euklid'schen Axioms herausgegeben. Von Stäckel wurde auch der Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauß und Wolfgang Bolyai ediert. Auch dieser war Holling bekannt. Holling dankt darüber hinaus Stäckel, der ihr weiteres unveröffentlichtes Quellenmaterial zur Verfügung stellte, ohne im Detail die Quellen zu benennen.

m schneidet die Gerade a zunächst im Punkt M. Dreht man die Gerade m, dann entfernt sich der Punkt M vom Fußpunkt B des Lotes, und wenn M in den unendlich fernen Punkt der Geraden a übergeht, dann „springt“ die Gerade m ab. Bolyai bezeichnete p die Abspringlage der Geraden m. Es sei α die Größe des Winkels BAp. Der Winkel ABM ist ein rechter Winkel. Dabei bezeichnet d die in der betrachteten Ebene liegende Senkrechte in A auf AB. Auf Basis dieser Überlegungen stellte Bolyai fest, dass man ohne das Parallelenaxiom nicht entscheiden kann, wie groß der Winkel α ist, an dem die Gerade „abspringt“.

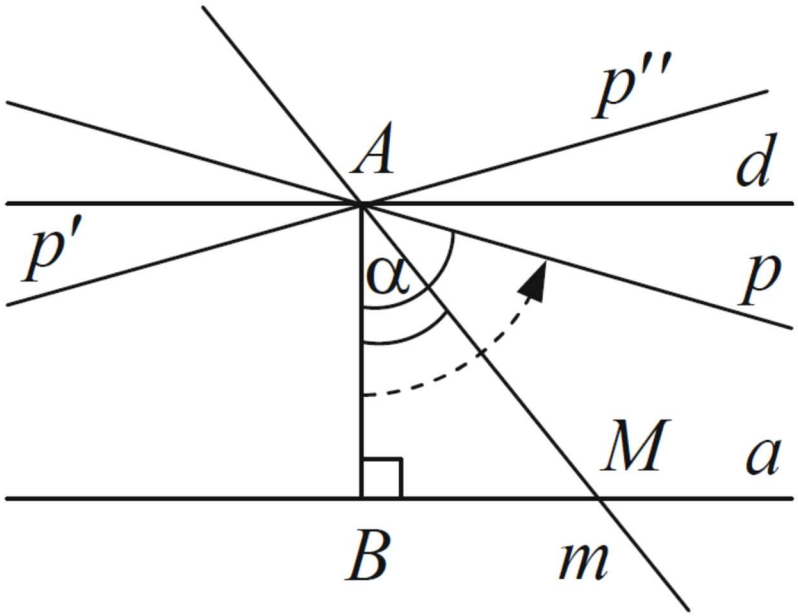


Abb. 1: „Die abspringe Gerade“. Aus: Tibor Weszely (2013): János Bolyai. Die ersten 200 Jahre. Aus dem Ungarischen von Manfred Stern. Basel: Birkhäuser, S. 79.

Deshalb sind zwei verschiedene Fälle möglich: Fall 1: $\alpha = 90°$. Fall 2: $\alpha < 90°$. Im Fall 1 erhalten wir die im euklidischen Postulat formulierte Aussage, und die auf diesem Axiom aufbauende Geometrie ist die euklidische Geometrie, von Bolyai als Σ-System bezeichnet. Die Geometrie, die sich auf Fall 2 bezieht, nannte Bolyai S-System. Hier ist die vom Punkt A gezogene Parallele die Gerade p, die mit der Senkrechten AB einen Winkel $\alpha < 90°$ einschließt.

Aus dieser Fallunterscheidung zog Bolyai die Schlussfolgerungen, dass das System Σ ein Grenzfall des Systems S ist. Für $i \to \infty$ (in einem Grenzwertprozess, bei dem der Winkel immer näher an die 90° herankommt) gehen sämtliche auf S bezogenen Umfangs-, Flächen- und Volumenformeln sowie andersartige Formeln in die ihnen entsprechenden analogen Formeln des Systems Σ über. Das gleiche gilt auch für die trigonometrischen Relationen. In § 33 hält Bolyai fest, dass es unentscheidbar ist, ob das System S oder das System Σ gilt: „Num Σ aut S aliquod reipsa sit, indecisum manet” (Bolyai 1903, § 33).

Bolyai nannte die Arbeit, die unter dem Namen „Appendix“ bekannt wurde, Scientia spatii, d.h. „Wissenschaft“ oder „Lehre“ vom Raum, mit dem Zusatz „absolut wahr“: „Scientiam spatii absolute veram exhibens“. Unter der absoluten wahren Raumlehre verstand er diejenige

Geometrie, in der das System Σ (euklidische Geometrie) lediglich ein Näherungsfall des System S (hyperbolische Geometrie) ist, abhängig von einem Parameter i, der in seiner Bedeutung eine Längeneinheit beschreibt, die keinen bestimmten (konstanten) Wert hat.

Bolyais Rede von einer „absoluten wahren Raumlehre" ist erklärungsbedürftig. Wenn Bolyai von „Raumlehre" spricht, meint er, wie damals üblich, die Geometrie. „Absolut wahr" bezieht sich dabei gerade nicht auf eine Eigenschaft des Parallelenpostulats und einen damit verbundenen Wahrheitsgewissheitsanspruch. Vielmehr lässt die „absolute Geometrie" die Geltung des Parallelenpostulats offen. Der Titel des Appendix spricht von einer „a priori" Unentscheidbarkeit: „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem"; zu deutsch: „Raumlehre, unabhängig von der (a priori nie entschieden werdenden) Wahr- oder Falschheit des berüchtigten XI. Euklid'schen Axioms)".

Was Holling in ihrer Arbeit interessierte war die Frage, was Bolyai unter dem Apriori der Unentscheidbarkeit des Parallelenpostulats verstand. Wolfgang Bolyai hatte Carl Friedrich Gauß ein Exemplar des Appendix nach Göttingen geschickt. In einem Brief an Wolfgang Bolyai vom 6. März 1832 äußerte sich Gauß dazu wie folgt: „Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen Σ und S a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, daß Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung."[27] Eine derart klare Stellung gegen Kant findet sich im Appendix von Johann Bolyai nicht. Bolyai spricht von einem „gänzlich und schlechterdings unentschieden" (Bolyai 1832, § 33), um auszudrücken, dass jeder Versuch, das Parallelenpostulat zu beweisen (oder zu widerlegen) vergeblich ist.

Für Kant war der Raum eine reine (d.h. keine sinnliche) Anschauung und zugleich eine Form der Anschauung. Kant führte diesen Terminus („reine Anschauung") ein, um seine These zu begründen, warum mathematische (geometrische und arithmetische) Urteile synthetisch a priori sind. Kant hielt die logische Möglichkeit der nicht-euklidischen Geometrie für nicht ausgeschlossen, verneinte aber ihre reale Möglichkeit, da diese in der reinen Anschauung a priori nicht konstruiert werden kann (Kant KrV, B15).[28] Einen Begriff konstruieren heißt laut Kant „die ihm korrespondierende Anschauung a priori darstellen" (Kant KrV, A713/B741). Über die Implikationen und Konsequenzen der Unabhängigkeit des Parallelenpostulats für Kants Philosophie wurde viel gestritten und diskutiert. Johann Bolyai hat sich an dieser Kontroverse nie öffentlich beteiligt. Bei Bolyai findet sich weder die Kantische Unterscheidung zwischen verschiedenen Urteilsarten (analytisch a priori, synthetisch a posteriori, synthetisch a priori) noch eine Auseinandersetzung mit Kants These, dass die reine Anschauung a priori für die Existenz synthetischer Urteile apriori bürge. Holling zieht daraus einen Schluss, der über die

27 Der Brief von Carl Friedrich Gauß an Wolfgang Bolyai, Göttingen, 6. März 1832, ist digitalisiert und als Open-Access-Publikation abrufbar unter der URL: https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/111. Das Digitalisat basiert auf dem Manuskript aus dem Nachlass Carl Friedrich Gauss: Briefe von Gauss, Archiv: Göttingen, SUB, Signatur: Cod. Ms. Gauß Briefe B: Bolyai 20.

28 Als ein Beispiel nannte Kant eine „Figur, die in zwei geraden Linien eingeschlossen ist". Seine Überlegung dazu lautete: „so ist in dem Begriff einer Figur, die in zwei geraden Linien eingeschlossen ist, kein Widerspruch, denn die Begriffe von zwei geraden Linien und deren Zusammenstoßung enthalten keine Verneinung einer Figur; sondern die Unmöglichkeit beruht nicht auf dem Begriffe an sich selbst, sondern der Konstruktion desselben im Raume" (Kant KrV, A220/B268). Der Begriff von „einer Figur, die in zwei geraden Linien eingeschlossen ist" enthält keinen Widerspruch, ist also logisch gesehen möglich (nicht unmöglich). Kant selbst hielt eine solche Figur aber für real unmöglich, da diese in der reinen Anschauung nicht konstruiert werden kann.

Frage nach historischer Quellenkritik und adäquater Wiedergabe des Standpunktes Johann Bolyais hinausgeht: Sollte es, wie Kant behauptete, eine reine Anschauung a priori geben, dann lässt sich auch durch sie nicht entscheiden, ob das Parallelenpostulat wahr oder falsch ist. Kants These von der Existenz eines synthetischen Apriori ist folglich irrelevant, sie mag wahr oder falsch sein.

Hollings Dissertation ist vor dem Hintergrund des problemgeschichtlichen Kontextes der Auseinandersetzung der „wissenschaftlichen" Philosophie mit Immanuel Kants Grundlegung der Metaphysik als Wissenschaft zu lesen. Die Schule von Münster um Heinrich Scholz vertrat im Vergleich zum Programm des Wiener Kreises eine metaphysikfreundlichere Lesart der „wissenschaftlichen Philosophie".

Scholz versprach sich von einer Rekonstruktion der Philosophiegeschichte Antworten auf aktuelle Fragen und Probleme der logisch-mathematischen Grundlagenforschung. Umgekehrt las er die Philosophiegeschichte durch die Brille der Grundlagenforschung seiner Zeit. Die Thematik der Arbeit Hollings, die sicher auf den Vorschlag ihres Doktorvaters zurückgeht, ist in diese Denkschule einzuordnen.

Für Scholz, der an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster den ersten institutionalisierten Schwerpunkt für mathematische Logik und Grundlagenforschung in Deutschland schuf, war Hilberts Forschungsprogramm einer formalen Axiomatik kein sinnleeres oder gegenstandsloses Spiel mit Zeichen. Insbesondere interpretierte Scholz die Axiome nicht als willkürlichen Setzungen, wie dies z.B. Hans Reichenbach tat (Scholz 1938). Aufbauend auf der Unterscheidung zwischen syntaktischer und semantischer Widerspruchsfreiheit interpretierte Scholz die semantische Allgemeingültigkeit logischer Sätze als ihre Gültigkeit in allen möglichen Welten. Insofern nichteuklidische Geometrien *widerspruchsfrei* konstruiert werden können, muss es zumindest eine mögliche Welt geben, in denen sie gelten. Damit ist noch keine Entscheidung darüber getroffen, welche Geometrie unserer wirklichen Welt zugrunde liegt. Erst in der Anwendung a posteriori wird ein formales Axiomensystem zu einem experimentell überprüfbaren Hypothesensystem (vgl. Scholz 1965).

Das klingt wie eine Lösung, macht aber in Wirklichkeit auf ein philosophisches Problem aufmerksam: Welchen erkenntnistheoretischen Geltungsstatus haben mathematische bzw. geometrische Axiome? Ausgelöst wurde die Debatte durch die empiristische Grundlegung der Geometrie von Hermann von Helmholtz und Bernhard Riemann. In Auseinandersetzung mit Bernhard Riemanns Arbeit „Über die *Hypothesen*, welche der *Geometrie* zu Grunde liegen" (Riemann 1869), hatte sich Hermann von Helmholtz dafür ausgesprochen, die geometrischen Axiome als empirische Tatsachen anzusehen. Helmholtz leitete die geometrischen Axiome aus mechanischen Eigenschaften von „festen Körpern" ab, deren unveränderliche Form und freie Beweglichkeit die „tatsächlichen Grundlagen der Geometrie" repräsentierten (Helmholtz 1868; 1870). Die Unveränderlichkeit von Maßstäben ist nun aber Bedingung der Möglichkeit jeder Messung. Das heißt: Die Annahme, dass der Maßstab während des Transports keine Deformation erleidet (und starre Meterstäbe unverändert transportabel, d.h. kongruent, sind), kann empirisch durch Messung nicht nachgewiesen werden. Es handelt sich vielmehr um eine Voraussetzung, die gemacht werden muss, um überhaupt eine Messung durchführen zu können. Aus diesem Grund zog Henri Poincaré den Schluss, dass die Axiome der Geometrie weder Hypothesen noch Tatsachen, sondern Konventionen sind. Hilbert schließlich

interpretierte Axiome als implizite Definitionen: Axiome werden implizit definiert, nämlich durch ihre Verknüpfung in einem Axiomensystem. Obwohl Hilbert selbst diesen Begriff als Terminus technicus nicht verwendet hat und eher spät und beiläufig davon sprach, ließ er keinen Zweifel daran, dass er die ewigen Diskussionen über die „wirkliche" Bedeutung der in Axiomen verwendeten Begriffe und deren expliziten Definitionsversuche für sinnlos erachtete. Natürlich ist ein Punkt auf dem Papier, d.i. eine ausgedehnte und visuell wahrnehmbare Druckerschwärze, nicht gleichzusetzen mit dem Punkt in der Geometrie, von dem in der Mathematik die Rede ist. Ein geometrischer Punkt ist ein Zeichen, nicht zu verwechseln mit dem Zeichenträger, d.i. der Druckerschwärze. Zeichen erhalten ihre Bedeutung erst im System von anderen Zeichen, in einem „Fachwerk" von Begriffen, d.i. der mathematischen Struktur. Eine Ähnlichkeit zwischen Zeichen und Bezeichnetem spielt dabei keine Rolle. Deshalb meinte Hilbert: „Man muß jederzeit an Stelle von ‚Punkte, Geraden, Ebenen' ‚Tische, Stühle, Bierseidel' sagen können" (zit. n. Volkert 2015, 53).[29]

Dieses berühmte Zitat wird oft als Belegstelle dafür angeführt, dass Hilbert ein völlig neues Verständnis von dem, was Axiome sind und sollen, begründete. Die Frage nach der Wahrheit der Axiome stellte sich als belanglos heraus, so nachzulesen, um nur ein Beispiel zu nennen, in Albrecht Beutelspachers Kleinem Mathematikum (Beutelspacher 2011, 23):

„Die Frage der Wahrheit stellt sich nach Hilbert überhaupt nicht. Denn um Mathematik zu machen, brauchen wir nicht zu wissen, was die Begriffe, die in den Axiomen vorkommen (Punkte, Geraden usw.), „sind". Wir müssen nicht wissen, was ein Punkt oder eine Gerade „ist", wir müssen nur wissen, wie man mit ihnen operiert. Diese Spielregeln werden durch die Axiome beschrieben. Die Frage nach der Wahrheit der Axiome stellt sich grundsätzlich nicht. Man kann eine Theorie aus den Axiomen entwickeln, ohne eine etwaige Bedeutung der Begriffe oder eine eventuelle Wahrheit der Axiome postulieren zu müssen. Kommt es dann zur Anwendung gewisser Ergebnisse der Theorie, muss überprüft werden, was die Grundbegriffe in der realen Situation bedeuten und inwiefern die Axiome innerhalb dieses Kontextes wahre Aussagen sind."

Doch ganz so einfach wie das obige Zitat glaubhaft macht, war und ist es nicht. Viel zitiert ist in diesem Zusammenhang der Disput zwischen David Hilbert und Gottlob Frege. In einem Brief vom 29.12.1899 schrieb Hilbert an Frege: „Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz" (Frege 1976, 66).

Es ist richtig: Für Hilbert waren Axiome keine grundlegenden, selbstevidenten Wahrheiten. Das heißt nicht, dass sich für Hilbert die Wahrheitsfrage nicht stellte. Für Hilbert war die Widerspruchsfreiheit, genauer: der Widerspruchsfreiheitsbeweis, das Kriterium für mathematische Wahrheit und Existenz, und zugleich Bedingung der Möglichkeit der Anwendung der Mathematik auf die Wirklichkeit. Neu war diese Idee nicht. Aus Hollings Arbeit lernen wir, dass sich diese Idee schon bei Johann Bolyai findet. Und den Arbeiten von Heinrich Scholz können wir entnehmen, dass Leibniz einer der prominenten Vertreter dieser Auffassung war.

29 Klaus Volkert, der Hilberts Grundlagen der Geometrie von 1899 neu herausgegeben und kritisch kommentiert hat, schreibt dazu: „dem Bericht von Blumenthal zufolge inspirierte dieser [Hermann Wiener] Hilbert in einem Berliner Wartesaal in Gegenwart von E. Kötter und A. Schönflies zu seiner berühmten Bemerkung (Volkert 2015, 53).

Ein Verdienst der Schule von Münster war es, an der Herausarbeitung einer präzisen Unterscheidung zwischen verschiedenen starken Stufen von Widerspruchsfreiheit, d.h. zwischen semantischer und syntaktischer Widerspruchsfreiheit, mitgewirkt zu haben. Holling selbst war daran nicht mehr beteiligt. Sie kehrte nach ihrer Promotion ins Kloster als Lehrerin zurück. Neben ihrer Doktorarbeit im Rahmen eines Lehramtsstudiums sind keine weiteren Publikationen bekannt. Dass Holling weder schulbildend war noch zu den großen Agitatorinnen der Wissenschaft zu zählen ist, mag ein Grund dafür sein, dass ihre Arbeit über Bolyai und dem Parallelenpostulat von der Geschichtsschreibung zur nichteuklidischen Geometrie nicht zur Kenntnis genommen worden ist. Doch selbst diejenigen Mathematikerinnen und Philosophinnen, die schulbildend waren und neue Theorien mitbegründet haben, bleiben bis heute oft „unsichtbar". Ein Beispiel dafür ist die ungarische Mathematikerin und Logikerin *Rózsa Péter (1905–1977).*

3. Der Beitrag von *Rózsa Péter*

Rózsa Péter war zu Lebzeiten eine international bekannte Koryphäe auf dem Gebiet der Rekursionstheorie, welche sie mitbegründete (s. Morris/Harkleroad 1990). Nachdem ihr Kollege und Freund László Kalmár ihr von Gödels Beweis berichtet hatte, begann sie in den frühen 1930er Jahren die in der Hilbert-Schule diskutierten rekursiven Funktionen genauer zu erforschen. Bereits 1932 trug sie dazu auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress in Zürich vor (Politzer 1932). Sie promovierte 1935 an der Universität Budapest (Péter 1935a, 1935b). Zwei Jahre später wurde sie Mitherausgeberin des renommierten Journal of Symbolic Logic. In der Mathematikgeschichte ist Rózsa Péter zwar als „Mutter" der Rekursionstheorie bekannt. Doch ihre Überlegungen zur philosophischen Grundlegung der Mathematik werden bis heute von dem Gros der Fachwelt ignoriert.

Während des Zweiten Weltkriegs arbeitete Péter an einem populärwissenschaftlichen Buch zu mathematischen Grundlagenfragen. Das Buch wurde 1944 unter dem ungarischen Titel Játék a végtelennel (Péter 1944) veröffentlicht. Viele Exemplare wurden bei Bombenangriffen zerstört und Neuauflagen gab es zunächst nicht. Bereits 1944 hatte Péter ihre deutsche Übersetzung zusammen mit dem ungarischen Manuskript an Paul Bernays in Zürich geschickt. Eine Veröffentlichung einer deutschen Ausgabe zog sich jedoch trotz Unterstützung von Paul Bernays und Ferenc Csergö bis in die 50er Jahre hin. Schließlich konnte dank der Bemühungen des deutschen Mathematikers Rudolf Kochendörffer 1955 eine deutsche Ausgabe veröffentlicht werden. Eine englische Übersetzung von dem ungarischen Mathematiker Zoltán Pál Dienes folgte 1957 (Péter 1957) und erneut 1961 mit geändertem Untertitel (Péter 1961). Insgesamt wurde das Buch in mindestens vierzehn Sprachen übersetzt. Mehrere Ausgaben wurden rezensiert (u.a. Kemeny 1948; Kleene 1952; Goodstein 1962).

Unterteilt ist das Buch „Das Spiel mit dem Unendlichen" (Péter 1955) in drei Kapitel. Das erste Kapitel, „Der Zauberlehrling", betont die Schlüsselstellung des Zählens als Grundlage des mathematischen Denkens und zeigt die Verbindung zwischen Geometrie und Arithmetik anhand vieler Fallbeispiele. Das zweite Kapitel, „Die schöpferische Form", ist eine Forstsetzung und Vertiefung des ersten Kapitels. Hier geht es um negative Zahlen, Vektoren, Umformung von Brüchen, unendliche Reihen, Zahlenbereichserweiterungen bis hin zu den komplexen Zahlen. Behandelt werden auch der Fundamentalsatz der Algebra, Potenzreihenentwicklungen,

Differential- und Integralrechnung. Hervorzuheben sind u.a. die Beweisskizzen für die Abzählbarkeit der rationalen und für die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen.

Das dritte Kapitel, „Die Selbstkritik der reinen Vernunft“, beginnt mit einem Überblick über die Entwicklung von der euklidischen zur nicht-euklidischen Geometrie mit einem Exkurs zur „Kreisquadratur“, gefolgt von eine „Nachschrift“ über die vierten Dimension. Besonderes Augenmerk gilt der Mengenlehre und ihren Antinomien (Zermelo-Russell-Antinomie, Burali-Forti-Antinomie, Richards Paradox). Unter dem Punkt „Die Form löst sich los“ wird eine Einführung in die formale (symbolische) Logik gegeben. Sodann werden Beweistheorie und Metamathematik mit den „Kernstücken“, dem Beweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik und der Kontinuumshypothese, behandelt. Der letzte Abschnitt „Was die Mathematik nicht kann“, führt zu einer Diskussion über das Entscheidungsproblem und die damit verbundenen Unvollständigkeits- und Unentscheidbarkeitsresultate.

Interessant und sicher einzigartig ist, dass das Buch mit einem Inhaltsverzeichnis beginnt und endet. Das Inhaltsverzeichnis am Ende ist gleichsam die mathematisch-fachsprachliche „Übersetzung“ für die literarisch-freie, metaphorische Sprache des Inhaltsverzeichnisses zu Beginn – ein raffiniertes Sprachspiel. Ein Beispiel: Kapitel 20 lautet „Die Form löst sich los“. Blättert man ans Ende des Buches erhält man als Übersetzung den Titel „Symbolische Logik“. Denn in der symbolischen bzw. formalen Logik geht es um die „Form“ der Aussagen, nicht um deren konkreten Inhalt, d.h. um deren strukturelle Anordnung und Verknüpfung. Hier ein Ausschnitt aus dem Inhaltsverzeichnis, der „III. Teil“:

INHALT	NACH DEM GEBRAUCH
III. Teil: Selbstkritik der reinen Vernunft	**III. Teil**
18. Und doch gibt es eine Mannigfaltigkeit von mathematischen Welten Nachschrift über die vierte Dimension	18. Die Quadratur des Kreises. Das Axiomensystem Euklids. Hyperbolische Geometrie. Verschiedene Geometrien.
19. Das Gebäude wird erschüttert	19. Gruppentheorie. Mengenlehre. Antinomien. Intuitionismus
20. Die Form löst sich los	20. Symbolische Logik.
21. Vor dem Tribunal der Über-Mathematik Nachschrift über die ins unendliche projizierte Anschauung	21. Beweistheorie. Metamathematik. Beweis der Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie. Kontinuumssatz. Nachschrift: Die Axiomatisierung der Analysis.
22. Was die Mathematik nicht kann	22. Unentschiedene und mit gegebenen Mitteln unlösbare Aufgaben. Die Frage der sogenannten unentscheidbaren Probleme.

Péters Buch wird bis heute der populärwissenschaftlichen Vermittlung von Mathematik zugerechnet. Doch bereits der sporadische Blick in das Inhaltsverzeichnis lässt erkennen, dass in dem Buch auch grundlegende philosophische Fragen analysiert werden Ein Beispiel, das an Maria Nicetia Hollings Arbeit thematisch anknüpft, ist Péters

Interpretation von János Bolyais Begründung der nichteuklidischen Geometrie (s. Péter 1955, 231f.). Bolyai fragte sich, so Péter, was passiert, wenn das Parallelenaxiom der euklidischen Geometrie aus dem Axiomensystem einfach weggelassen wird. Welche Sätze über Punkte, Geraden und Ebenen lassen sich unter Beibehaltung der übrigen Axiome aus dem geometrischen System ableiten? Ausgehend von dieser Frage stellte Bolyai fest, dass es möglich ist, dass es zu einer Geraden g und einem Punkt P (der nicht auf der Geraden liegt) mindestens zwei Geraden gibt, die durch den Punkt P gehen und zur Geraden g parallel sind. Das Parallelenpostulat ist also nicht notwendig wahr oder falsch. Bolyai hat aber keinen Beweis für die Unabhängigkeit des Parallelenpostulats vorgelegt. Das gelang erst später, mit der Konstruktion von euklidischen Modellen für die hyperbolische Geometrie. Bei Péter liest sich das so (ebd., 232f.):

„Läßt sich das Parallelenaxiom vielleicht dennoch beweisen, so daß die ganze hyperbolische Geometrie auf einer falschen Annahme beruht und aus ihr früher oder später eine Schar von Widersprüchen an den Tag kommen wird? Auf diese Frage haben wir heute bereits eine beruhigende Antwort: die euklidische und die hyperbolische Geometrie sind auch hinsichtlich ihrer Zuverlässigkeit gleichwertig. Würde die hyperbolische Geometrie einmal zu einem Widerspruch führen, so wäre auch die euklidische Geometrie widerspruchsvoll. Es läßt sich nämlich ganz innerhalb der euklidischen Geometrie ein „Modell" für die hyperbolische Geometrie konstruieren. „

Durchwegs philosophisch deutet Péter Modelle als „abgegrenzte Welten", deren Zahl potentiell unendlich ist. Die beweisbare Unentscheidbarkeit des Parallelenpostulats führte zu der Einsicht, dass es immer dann, wenn es mehrere konsistente, nichtisomorphe Interpretationen (Modelle) eines Axiomensystems gibt, unentscheidbare Sätze existieren – ein bemerkenswertes Resultat der Debatte um Existenz und Widerspruchsfreiheit in der Philosophie der Mathematik, die Hand in Hand mit der Entwicklung der modernen Modelltheorie ging.

Die Unvollständigkeit der Gödel-Theoreme ist allerdings tiefergehend. Denn die Gödel'sche Unvollständigkeit gilt (nach dem Isomorphiesatz von Dedekind) auch im Falle isomorpher Modelle.[30] In ihrem Buch Das Spiel mit dem Unendlichen hebt Péter hervor, dass der Satz von Gödel „nicht von bisher unentschiedenen oder in negativem Sinn entschiedenen Problemen" handelt, „sondern von innerhalb der gebräuchlichen Axiomensysteme unentscheidbaren Problemen" (Péter 1955, 269). So verstanden enthüllte die Mathematik „selbst die Grenzen ihrer eigenen Fähigkeiten" (ebd., 276). Das Fortschreiten zu immer umfassenderen formalen Systemen bzw. reichhaltigeren Sprachen (ad infinitum) macht die Mathematik zu etwas Dynamischen. „Die Mathematik ist", um Péter zu zitieren, nichts Statisches und Abgeschlossenes, sondern etwas Lebendiges, sich weiter Entwickelndes" (Péter 1955, 276). Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit unterstreichen, so verstanden, die erkenntnistheoretisch-philosophische Überzeugung vom kreativen Charakter der Mathematik. Mithin besteht Erkenntnisfortschritt in der Mathematik in der heuristischen Konstruktion immer neuer Methoden und

30 Diesen Unterschied hebt Dieter Hoffmann wie folgt hervor (Hoffmann 2011, 231): „Die Gödel'sche Unvollständigkeit ist viel tiefer gehender. Wir treffen sie auch in formalen Systemen an, die nur eine einzige konsistente Interpretation zulassen. Ein Beispiel eines solchen Systems ist die Peano-Arithmetik, formuliert in der Prädikatenlogik zweiter Stufe. Hier besagt der Isomorphiesatz von Dedekind, dass alle Modelle isomorph zum Standardmodell sind, und auch in diesem System existieren unentscheidbare Sätze."

Axiomensystemen, die auf die jeweils bisher bekannten und akzeptierten Beweisverfahren nicht reduzierbar sind.

Im Jahr 1940 hielt Péter Rózsa bei einem Kolloquium des Instituts für Theoretische Physik der Universität Budapest den Vortrag „Az axiomatikus módszer korlátai", übersetzt: „Die Grenzen der axiomatischen Methode" (Péter 1941a). Vor ihr hatte László Kalmár über „Die Ziele, Methoden und Ergebnisse der Hilbertschen Beweistheorie" gesprochen (ungarisch: „A Hilbert-féle bizonyításelmélet célkitűzései, módszerei, eredményei", Kalmár 1941a). Beide Vorträge wurden 1941 im Band 48 der ungarischen Zeitschrift Matematikai és Fizikai Lapok veröffentlicht. Unmittelbar danach verfasste Rózsa Péter eine Rezension über László Kalmárs Artikel für das Journal of Symbolic Logic (Péter 1941b). Kalmár revanchierte sich: Er rezensierte Rózsa Péters Beitrag in der gleichen Zeitschrift (Kalmár 1941b).

In Kalmárs Arbeit werden die axiomatische Methode Hilberts vor dem Hintergrund seiner Beweistheorie und dem sogenannte Funktionskalkül ausführlich besprochen. Péters Beitrag konzentriert sich auf die Eigenschaft von Axiomensystemen, die wir heute standardmäßig als „Kategorizität" bezeichnen. Eine Theorie heißt kategorisch in einer bestimmten unendlichen Mächtigkeit, wenn sie im Wesentlichen nur ein Modell dieser Mächtigkeit hat.

Aus dieser Definition und dem Löwenheim-Skolem-Theorem folgt, dass jede Theorie erster Ordnung mit einem Modell von unendlicher Kardinalität nicht kategorisch sein kann. Es wurde von Gödel bewiesen, dass auch die Logik zweiter und höherer Ordnung nicht vollständig und damit nicht kategorisch ist. Der Begriff der Kategorizität ist stärker als der Begriff der Vollständigkeit, da jedes kategoriale System vollständig ist, aber einige vollständige Systeme nicht kategorisch sind.

In ihrem Vortrag diskutierte Péter diese Beziehung zwischen Kategorizität und Vollständigkeit. Die Ergebnisse bezüglich Monomorphismus und Kategorizität zeigten zusammen mit den Unvollständigkeits- und Unentscheidbarkeitsresultaten, dass sich Hilbert in seiner Überzeugung von der Nichtexistenz des „Ignorabimus" geirrt hat (Péter 1941a, 143):

„Diese Ergebnisse widerlegen Hilberts Glauben: „In der Mathematik gibt es keinen Ignorabimus". Dass dieser Sachverhalt aber durch Hilberts rein mathematische Methoden deutlich gemacht werden kann, dass man das „Ignorabimus" in der Mathematik mit mathematischen Mitteln streng beweisen kann, ist vielleicht nicht weniger schön, als wenn es kein „Ignorabimus" in der Mathematik gäbe."[31]

Mit der Behauptung, dass es in der Mathematik kein „Ignorabimus" gibt, hatte Hilbert seine Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems wiederholt unterstrichen.[32] Zugleich handelte es sich um eine Antwort auf Emil du Bois-Reymonds

31 In seiner Rezension fasst Kalmár diese Passage zusammen, wobei er das englische Wort „nice" statt des deutschen „schön" bzw. des ungarischen „szép" verwendet (Kalmár 1941b, 111).

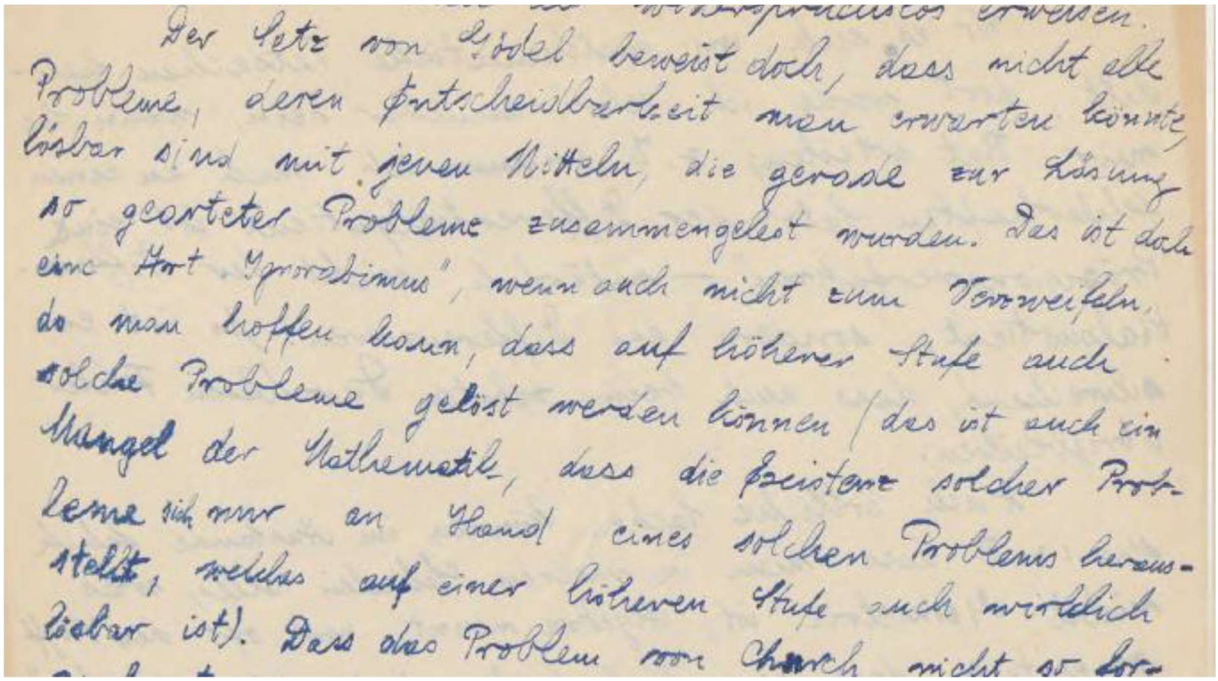
32 "Diese Ueberzeugung [sic] von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik giebt [sic] es kein Ignorabimus!" (Hilbert 1900, 262).

„Ignorabimus"-Rede (du Bois-Reymond 1872) und die dadurch entfachte Debatte um die Grenzen der Erkenntnis.

Hilbert hatte die Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrie auf die euklidische zurückgeführt und die Widerspruchsfreiheit der euklidischen Geometrie unter der Annahme beweisen können, dass die Arithmetik der reellen Zahlen widerspruchsfrei ist (Hilbert 1899). Die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik blieb aber offen. Diese Frage hatte Hilbert explizit in seinem Vortrag „Mathematische Probleme" auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1900 in Paris (Hilbert 1900) zur Agenda gemacht. Später entwickelte David Hilbert ein Forschungsprogramm, das zum Ziel hatte, die Mathematik als vollformalisiertes System von Grund auf neu aufzubauen und die Widerspruchsfreiheit der formal ableitbaren Sätze mittels finiter Beweismittel nachzuweisen (vgl. Peckhaus 1990; Tapp 2013; Thiel 1972). Insbesondere sollte für jeden mathematischen Satz entschieden werden können, ob er wahr oder falsch ist. Um die Ableitbarkeit aller wahren Sätze aus dem Axiomensystem sicher zu stellen, wurde die Metamathematik als Beweistheorie entwickelt, die Beweise selbst zum Gegenstand der Untersuchung hat. Dazu wurden die Kriterien der Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit des formal-axiomatischen Systems präzisiert.

Durch Kurt Gödels Beweis aus dem Jahr 1931 stellte sich heraus, dass das Hilbertprogramm in seiner ursprünglich intendierten Fassung, die Widerspruchsfreiheit der Mathematik schlechthin zu beweisen, undurchführbar ist. Gödels Beweis besteht aus zwei Theoremen: Der Erste Unvollständigkeitssatz besagt, dass es in hinreichend starken widerspruchsfreien Systemen, wie der Principia Mathematica und verwandten Systemen, zu denen auch die Arithmetik und Cantors Mengenlehre gehört, Aussagen gibt, die man weder formal beweisen noch widerlegen kann. Der Zweite Unvollständigkeitssatz besagt, dass hinreichend starke widerspruchsfreie Systeme ihre eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen können (vgl. Krapf/Halbeisen 2020; Smith 2007). Auf die Frage nach der philosophischen Implikation des Gödel-Beweises Bezug nehmend schrieb Rózsa Péter in einem Brief vom 27. Januar 1944 an Paul Bernays:

„Der Satz von Gödel beweist doch, dass nicht alle Probleme, deren Entscheidbarkeit man erwarten könnte, lösbar sind mit jenen Mitteln, die gerade zur Lösung so gearteter Probleme zusammengelegt wurden. Das ist doch eine Art "Ignorabimus", wenn auch nicht zum Verzweifeln, da man hoffen kann, dass auf höherer Stufe auch solche Probleme gelöst werden können (das ist auch ein Mangel der Mathematik, dass die Existenz solcher Probleme sich nur an Hand eines solchen Problems herausstellt, welches auf einer höheren Stufe auch wirklich lösbar ist)."



Rózsa Péter, Brief an Paul Bernays, Budapest (27.01.1944). Paul Bernays Nachlass, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, Archive und Nachlässe, Hs_975_3461_3524.27.

Über die Frage, ob beweisbare Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit Hilberts Credo des Non-Ignorabimus falsifiziert, ist viel gestritten und diskutiert worden. Setzten wir, wie Hilbert, mathematische Existenz mit beweisbarer Widerspruchsfreiheit gleich, so wissen wir definitiv, dass die Widerspruchsfreiheit der vollformalisierten Mathematik (in einem absoluten und endgültigen Sinn) nicht beweisbar ist. Folgt daraus die Existenz eines Ignorabimus? Von welchem Existenzbegriff sprechen wir, wenn wir sagen, dass es ein Ignorabimus entgegen Hilberts Überzeugung gibt? Du Bois-Reymond hatte erklärt, in gleicher Weise, "wie denn Mathematik eine Aufgabe für bewältigt hält, deren Unlösbarkeit sie bewies" (du Bois-Reymond 1882, 164), darlegen zu können, dass es bestimmte Fragen gibt, die die Wissenschaft prinzipiell nie wird beantworten können. Zählt das Entscheidungsproblem in der mathematischen Logik dazu? Auf das Entscheidungsproblem gibt es eine definitive Antwort. Es ist beweisbar unentscheidbar und insofern lösbar. Es scheint also eine Frage der Perspektive, ob wir Hilberts Non-Ignorabimus, alias das „Axiom der Lösbarkeit", für widerlegt oder bestätigt halten.

Was das „Ignorabimus" als philosophisches Problem so heikel macht, ist der Tatsache geschuldet, dass damit in seiner ursprünglich intendierten Form ein Determinismus als eine modale Aussage über zukünftiges Wissen zur Disposition gestellt wurde. In den 1990er Jahren griff Per Martin-Löf das Thema erneut auf und interpretierte die Unvollständigkeits- und Unentscheidbarkeitsresultate als Argument für das synthetische Apriori. Die Unvollständigkeit entspricht gewissermaßen der in einem synthetischen Begriff fehlenden Erkenntnis, die analytisch nicht gewonnen werden kann. Durch Hinzunahme weiterer Axiome wird die Unvollständigkeit zwar teilweise aufgehoben, weil neue Aussagen abgeleitet werden können, aber mit dem Preis weiterer neuer Unvollständigkeit (Martin-Löf 1994). Man kann diese Sichtweise vertreten, muss es aber nicht. Bis heute wird darüber diskutiert und gestritten, was unter dem synthetischen Apriori zu verstehen ist. Es ist und bleibt erklärungsbedürftig, was es heißt, dass es Urteile gibt, die erkenntniserweiternd und

zugleich erfahrungsunabhängig gelten. Letztlich geht es bei dieser Frage um eine sichere und zuverlässige Grundlegung des mathematischen Erkenntnisfortschritts, der seiner Natur nach offen und kreativ ist.

1944, in dem gleichen Jahr, in dem Péters Buch Das Spiel mit dem Unendlichen erschien, führte Emil Post einen Begriff ein, der heute zum Standardrepertoire in der Rekursions- und Berechenbarkeitstheorie gehört: kreative (produktive) Mengen, d.i.: Es gibt rekursiv aufzählbare Mengen, die nicht rekursiv sind (Post 1944). Egon Bröger erklärt die Grundidee hinter diesem Satz sehr anschaulich: „rekursionstheoretisch ist der zugrundeliegende Wahrheitsbegriff produktiv", d.h.: „man kann effektiv zu jeder rekursiv aufzählbaren Approximation eines Wahrheitsbegriffs durch den Beweisbarkeitsbegriff einer genügend reichhaltigen, erststufigen, widerspruchsfreien Theorie eine dort nicht herleitbare, aber in der Sprache der Theorie formulierte und wahre Aussage angeben" (Bröger 1989, 373). Der Begriff „kreative (produktive) Mengen" meint also nicht, dass Mengen als abstrakten Objekten die Eigenschaft zukommt, kreativ zu agieren. Das wäre eine antropomorphe Zuschreibung. Post wollte damit zum Ausdruck bringen, dass mathematischen Denken kreativ ist (Post 1944, 295):

„The conclusion is unescapable that even for such a fixed, well defined body of mathematical propositions, mathematical thinking is, and must remain, essentially creative. To the writer's mind, this conclusion must inevitably result in at least a partial reversal of the entire axiomatic trend of the late nineteenth and early twentieth centuries, with a return to meaning and truth as being of the essence of mathematics."

In den einleitenden Bemerkungen verweist Post auf die Bedeutung der Arbeiten von „Gödel, Church, Turing, Kleene, Rosser an others" (ebd., 284). Rózsa Péter wird nicht erwähnt. Immerhin wir eine Arbeit von ihr im Literaturverzeichnis aufgeführt (Péter 1941b). Dass Frauen in der Philosophie und Geschichte der Mathematik marginalisiert wurden und werden, ist ein gesellschaftliches und soziologisches Problem, kein philosophisches oder mathematisches. Dies ist jedoch kein Grund, sich nicht mit philosophischen Arbeiten von Frauen über die Mathematik kritisch und problemorientiert auseinanderzusetzen. Im Gegenteil. Die Beiträge von Frauen besser und sichtbarer in die Geschichte und Philosophie der Mathematik zu integrieren ist eine der wichtigen Herausforderungen, denen sich die gegenwärtige Forschung zu stellen hat.

4. Herausforderung und Perspektiven

Die Unterrepräsentation von Frauen in der Philosophie und Geschichte der Mathematik ist ein schon langes bekanntes, aber wenig beachtetes Forschungsdesiderat. Mit vorliegender Studie sollte beispielhaft gezeigt werden, dass und wie sich Beiträge von Frauen problemorientiert in den philosophischen und historischen Diskurskontext integrieren lassen. Damit verbunden sind eine Reihe von Herausforderungen und Perspektiven für eine neue Praxis, Philosophie der Mathematik zu betreiben. Diese Herausforderungen und Perspektiven sollen im Folgenden in Form eines fiktiven Dialogs diskutiert werden. Person A stellt die Fragen. Sie vertritt die Leserschaft zum vorliegenden Aufsatz. Person B repräsentiert die Autorin, die Rede und Antwort steht.

Person A: Hollings Doktorarbeit aus dem Jahr 1930 ist nur eine von vielen Dissertationen, die zu Beginn des 20. Jahrhunderts von Frauen zur Philosophie der Mathematik verfasst wurde. Warum sollte diese und nicht eine andere Arbeit gelesen werden?

Person B: Dass Hollings Arbeit hier vorgestellt wurde, heißt nicht, dass andere Arbeiten nicht gelesen werden sollten, weil sie weniger bedeutsam oder uninteressant wären. Am Beispiel Hollings sollte gezeigt werden, dass es nicht großer Kompendien der Geistesgeschichte bedarf, um gehaltvoll und instruktiv klassische Fragen und Probleme in der Philosophie der Mathematik zu behandeln. Dass die Wahl auf Holling fiel und nicht auf eine andere unbekannte Philosophin und Mathematikerin ihrer Zeit, hatte inhaltliche Gründe: Hollings Arbeit wirft einen differenzierteren Blick auf die philosophische Rezeptionsgeschichte zu „Kant und die nichteuklidischen Geometrien" zu Beginn des 20. Jahrhunderts und bringt uns das Werk Bolyais näher, der in der Philosophie der Mathematik meist nur als Mitbegründer der nichteuklidischen Geometrie erwähnt wird. Verglichen mit den bekannten philosophischen Repliken etwa von Hans Reichenbach oder Moritz Schlick, ist Hollings philosophisch motivierte Auseinandersetzung mit *János Bolyai* quellenkritisch fundierter.

Person A: Was lernen wir konkret aus Hollings Arbeit?

Person B: Zu untersuchen, wo und wie das Werk und Wirken von Frauen wissenschaftliche und philosophische Entwicklungen und Diskurse beeinflusst, mitgestaltet und geprägt haben, ist in vielen Fällen ein heuristisches Werkzeug, um stereotype Geschlechterrollen, Denk- und Verhaltensweisen zu hinterfragen. Arbeiten von Frauen „aus der Vergangenheit zu holen", inhaltlich zu rekonstruieren und zu kontextualisieren, lädt dazu ein, kanonisiertes Lehrbuchwissen kritisch zu hinterfragen.

Person A: Ein Beispiel wäre an dieser Stelle hilfreich.

Person B: Es ist oft zu lesen, dass erst mit der „Hilbert-Axiomatik" die Widerspruchsfreiheit zum Kriterium für mathematische Existenz wurde. Davor wurde die Konstruierbarkeit eines **anschaulichen Modells** für mathematische Existenz gefordert. Diese kanonisierte Lehrmeinung entspricht allerdings nicht ganz den historischen Tatsachen. Schon Leibniz war der Auffassung, dass Widerspruchsfreiheit Bedingung der Möglichkeit von Existenz ist. Auch bei Christian Wolff fiel *Möglich*-Sein mit *widerspruchsfreier* Denkbarkeit zusammen. Bei Johann Bolyai schließlich tritt der Widerspruchsfreiheitsbeweis in enge Verbindung mit der Forderung der Konstruierbarkeit. Nichts davon kann man nachlesen in den Arbeiten berühmter Vertreter des Wiener Kreises oder der Berliner Gruppe für empirische Philosophie, sehr wohl aber bei Holling und ihrem Doktorvater Heinrich Scholz.

Person A: Die Beiträge von Frauen in philosophische Diskussionen über die Mathematik und ihre Geschichte einzubeziehen bedeutet also nicht nur die dekonstruktive Kritik an der akademischen Wissensproduktion. Wir gelangen dadurch zu einem besseren und tieferen

Verständnis philosophischer Grundlagendebatten in historischer und systematischer Hinsicht.

Person B: Ganz genau. Das zeigt auch das zweite Beispiel, Rózsa Péter. Péters Überlegungen zu modellbasierter Widerspruchsfreiheit, relativer Beweisbarkeit und den philosophischen Implikationen der Gödel-Theoreme unterstreichen die heuristische Relevanz des axiomatischen Verfahrens als eines Prozesses der Generierung von Axiomensystemen und greifen weit voraus auf spätere Diskussionen in der Philosophie der Mathematik.

Person A: Rózsa Péter zählt zu den wenigen Mathematikerinnen und Philosophinnen, die eine neue Theorie, die Rekursionstheorie, mitbegründet hat. Sie legte damit einen wichtigen Grundstein für die Computerwissenschaften. Sie war zu ihrer Zeit bekannt für ihre Forschungs- und Lehrtätigkeit. Ihre Publikationen sind beeindruckend. Im Fall „Holling" verhält es sich offenbar anders. Sie schrieb lediglich eine Doktorarbeit im Rahmen eines Lehramtsstudiums. Darüber hinaus sind keine weiteren Publikationen bekannt. Holling war weder schulbildend noch zählte sie zu den großen Agitatorinnen der Wissenschaft, die innovative Forschung auf dem Weg brachte.

Person B: Das ist richtig. Aber müssen Frauen zu den großen Entdeckerinnen und Erfinderinnen zählen, schul- und theoriebildend gewirkt haben, um deren Texte und Arbeiten zur Kenntnis zu nehmen? Oder gehen wir hier nicht von einer falschen Erwartungshaltung darüber aus, was Wissenschaftsgeschichte zu leisten hat? Geht es nicht vielmehr darum, Wissenschaftskulturen und -praxen zu erforschen und Frauen als Teil davon anzuerkennen? Die Geschichte der Philosophie und Mathematik hat es bis heute versäumt, Frauen in die „großen Erzählungen" wie auch in die „petites histoires" einzubeziehen.

Person A: Wie soll das gelingen? Können einzelne Fallbeispiele das Potential besitzen, Arbeiten von Frauen erfolgreich und effektiv in die Philosophiegeschichte der Mathematik zu integrieren? Handelt es sich dabei nicht um einen Tropfen auf den heißen Stein?

Person B: Das trifft zu, solange es sich um einzelne Beispiele handelt. Einige wenige Fallstudien bewirken nichts. Bekanntlich höhlt aber steter Tropfen den Stein. Was wir brauchen ist ein umfassender kultureller „Denkstilwandel", eine neue Praxis in der Philosophie der Mathematik.

Literatur

Abele, A., Neunzert, H. u. Tobies, R. (Hgg.) (2004): Traumjob Mathematik!: Berufswege von Frauen und Männern in der Mathematik. Berlin: Springer.

Beutelspacher, A. (2011): Kleines Mathematikum – Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik. München: Goldmann

Boedeker, E. (1935-1939). *25 Jahre Frauenstudium* in Deutschland. Verzeichnis der Doktorarbeiten von Frauen 1908–1933. Hannover: Selbstverlag (Band 1: 1935).

Bolyai, J. (1903). Appendix : scientiam spatii absolute veram exhibens, hg. v. Kürschák, József. Budapest: Acad. Scientiarum Hungaricae. URL https://diglib.tugraz.at/appendix-scientiam-spatii-absolute-veram-exhibens-1903 [09.06.2021].

Bröger, E. (1989): Berechenbarkeit, Komplexität, Logik. Algorithmen, Sprachen und Kalküle unter besonderer Berücksichtigung ihrer Komplexität. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

du Bois-Reymond, E. (182): Goethe und kein Ende. In: Reden von Emil du Bois-Reymond in zwei Bänden, 2. Aufl., Band 1. Leipzig: Veit & Comp. 1912, 157–183.

du Bois-Reymond, E. (1872): Über die Grenzen des Naturerkennens. In: Reden von Emil du Bois-Reymond in zwei Bänden, 2. Aufl., Band 1. Leipzig: Veit & Comp. 1912, 441–473.

Frege, G. (1976): Wissenschaftlicher Briefwechsel. Hg. v. Gottfried Gabriel u. a.. Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel. Hamburg: Meiner.

Gauss, F. Briefe von Gauss, Archiv: Göttingen, SUB, Signatur: Cod. Ms. Gauß Briefe B: Bolyai 20. URL: https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/ [09.06.2021].

Gödel, K. (1931): Über formal unentscheidbare Sätze der Principia und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik 38, 173–198.

Goodstein, R.L. (1962). Review: Playing with Infinity, by Rozsa Peter. The Mathematical Gazette 46(356), 157.

Helmholtz, H. (1868). Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität 3:9, 193–221. URL: http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PID=GDZPPN002512017 [09.06.2021].

Helmholtz, H. (1870). Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Vortrag gehalten im Dozentenverein zu Heidelberg 1870 / neu hrsg. von Gabriele Dörflinger, Universitätsbibliothek Heidelberg. https://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/13156/ [09.06.2021].

Hilbert, D. (1899): Grundlagen der Geometrie. Leipzig: Teubner.

Hilbert, D. (1900): Mathematische Probleme. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 253–297.

Hilbert, D. (1928): Die Grundlagen der Mathematik. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, Band VI, 65–92.

Hoffmann, D. (2011): Grenzen der Mathematik - Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik. Berlin/Heidelberg: Springer.

Holling, A. (1930): „Die Frage nach der Existenz der Nichteuklidischen Geometrien und ihre Beantwortung in den Schriften der beiden Bolyai.“ Philosophisches Jahrbuch 44, 41–78.

Kalmár, L (1941b): Review: “The Bounds of the Axiomatic Method, by Rózsa Péter.” The Journal of Symbolic Logic 6(3), 110–111.

Kalmár, L. (1941a): A Hilbert-féle bizonyításelmélet célkitűzései, módszerei, eredményei (The Aims, Methods and Results of Hilbertian Proof Theory). Matematikai és Fizikai Lapok 48, 65–119.

Kant, I. (1787). Werke, Bd. 3: Kritik der reinen Vernunft. Akademie Textausgabe (Nachdruck 1968). Berlin: Walter de Gruyter.

Kemeny, J. G. (1948): Review: Playing with the Infinite. Mathematics for Outsiders, by Rózsa Péter. The Journal of Symbolic Logic 13(3), 141–142.

Kleene, S. (1952): Review: Rekursive Funktionen, by Rózsa Péter. The Bulletin of the American Mathematical Society 58, 270–272.

Krapf, R. und Halbeisen, L. (2020): Gödel’s Theorems and Zermelo’s Axioms: A Firm Foundation of Mathematics. Cham: Springer.

Martin-Löf , P. (1994): Analytic and Synthetic Judgements in Type Theory, In: P. Parrini (Hrsg.): Kant and Contemporary Epistemology. Dordrecht: Springer, 87–99.

Morris, E. & Harkleroad, L. (1990): Rósa Péter: Recursive Function Theory's Founding Mother. The Mathematical Intelligencer 12(1), 59–61.
Peckhaus, V. (1990): Hilbertprogramm und Kritische Philosophie: Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.
Péter, R. (1935a): „Konstruktion nichtrekursiver Funktionen." Mathematische Annalen111, pp. 42–60.
Péter, R. (1935b): „Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion." Mathematische Annalen, 110, pp.612–632.
Péter, R. (1944): Játék a végtelennel. Budapest: Dante Könyvkiadó.
Péter, R. (1951): Rekursive Funktionen. Budapest: Akademiai Kiado.
Péter, R. (1955): Das Spiel mit dem Unendlichen. Mathematik für Außenstehende. Leipzig: Teubner.
Péter, R. (1961): Playing with Infinity (trad. by Z. P. Dienes). New York: Dover Publications. (Originally published in 1944 as Játék a végtelennel. Budapest: Dante Könyvkiadó.)
Politzer, R. (1932): Rekursive Funktionen. In: W. Saxer (ed.). Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932, 2. Bd.: Sektionsvorträge. Zürich/Leipzig: Orell Füssli Verlag, 336–337.
Post, E. (1944): Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. Bulletin of the American Mathematical Society 50, 284–316.
Riemann, B. (1868). Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Band 13, 133–150. URL: https://www.deutschestextarchiv.de/book/show/riemann_hypothesen_1867 [09.06.2021].
Rossiter, M.W. (1993): The Matthew Matilda Effect in Science. Social Studies of Science 23, 325–341.
Scholz, H. (1938). Die *mathematische Logik und die Metaphysik*. Philosophisches Jahrbuch der Görres-Gesellschaft 51, 257–291.
Scholz, H. (1965). Metaphysik als strenge Wissenschaft. Darmstadt: Wiss. Buchges.
Smith, P. (2007): An Introduction to Gödel's Theorems. Cambridge, MA: Cambridge University Press
Stäckel, P. (1913): Geometrischen Untersuchungen von Wolfgang und Johann Bolyai
Tapp, C. (2013): An den Grenzen des Endlichen. Das Hilbertprogramm im Kontext von Formalismus und Finitismus. Heidelberg: Springer.
Thiel, C. (1972): Grundlagenkrise und Grundlagenstreit , Meisenheim am Glan: A . Hain Verlag.
Tobies, R. (Hg.). (2008): „Aller Männerkultur zum Trotz": Frauen in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik. Frankfurt a.M./New York: Campus Verlag (erneuerte und erweiterte Aufl. des Buches von 1997).
Volkert, K. (2015). David Hilbert: Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899). Springer Berlin Heidelberg.
Weszely, T. (2013): János Bolyai. Die ersten 200 Jahre. Aus dem Ungarischen von Manfred Stern. Basel: Birkhäuser.

Prüfungsformate als Ansatzpunkt gendersensibler universitärer Lehre im Fach Mathematik

Robin Göller, Lara Gildehaus, Michael Liebendörfer, Jörn Steuding

Einleitung: Das Phänomen der Leaky Pipeline

Trotz einer Vielzahl von bestehenden Förderprogrammen und zunehmenden gesamtgesellschaftlichen Diskursen zu Gender und Equality sind Frauen auf höheren Stufen der akademischen Laufbahn nach wie vor unterrepräsentiert. Obgleich mittlerweile etwas mehr Frauen als Männer ein Studium beginnen und auch abschließen, liegt der Frauenanteil bei Promotionen bei lediglich ca. 45 %, der bei Habilitationen nur noch bei ca. 30 % (Statistisches Bundesamt, 2020). Der Frauenanteil bei hauptberuflichen Professuren liegt bei ca. 25 % (Statistisches Bundesamt, 2020). Diese sogenannte Leaky Pipeline der Wissenschaft (Astorne-Figari & Speer, 2018; Dubois-Shaik & Fusulier, 2017; Zacharia et al., 2020) ist seit längerem Bestandteil verschiedenster Forschungsperspektiven und häufiger Ausgangspunkt der benannten Förderprogramme.

Im Fach Mathematik zeigt sich diese Leaky Pipeline noch deutlicher. Während mittlerweile ca. 49 % der Studienanfänger:innen im Bereich Mathematik weiblich sind, sind schon bei den Absolvent:innen nur noch etwa 46 % weiblich. Ein Vergleich der Geschlechteranteile zwischen allen Studierenden und denen im ersten Fachsemester zeigt, dass offenbar schon nach dem ersten Semester Frauen eher ihr Mathematikstudium abbrechen als Männer (vgl. **Tabelle *1***). Dieses Phänomen scheint im Bachelor-Studiengang Mathematik am stärksten ausgeprägt zu sein, aber auch bei Lehramts-, Master- und Promotionsstudierenden ist der Frauenanteil im ersten Fachsemester etwas höher als bei den Höhersemestrigen. Auch wenn diese Unterschiede zunächst relativ gering erscheinen, tragen auch sie zum kontinuierlichen Abnehmen des Frauenanteils im Verlauf der akademischen Laufbahn bei. Besonders deutlich zeigt sich die Leaky Pipeline jedoch bei den Anfänger:innenzahlen zur jeweils nächsthöheren Qualifikation: Während etwas mehr als 40 % der Studienanfänger:innen in Mathematik-Bachelor-Studiengängen weiblich sind, sind nur noch ein Drittel der Masterstudierenden und weniger als 30 % der Promovierenden im Fach Mathematik weiblich. In der Folge sind aktuell gerade einmal 18 % der Mathematik-Professuren mit Frauen besetzt (Statistisches Bundesamt, 2019).

Betrachtet man hingegen Lehramtsstudierende der Mathematik, zeigt sich ein etwas anderes Bild. Hier ist der Frauenanteil bei den Absolvent:innen sogar etwas höher als zu Studienbeginn. Offenbar verbleiben Frauen im Vergleich zu Männern eher bis zum Abschluss in (den hier u. a. zusammengefassten Grund-, Haupt, Realschul-, Gymnasial-, und Berufsschul-) Lehramtsstudiengängen mit Fach Mathematik als in Mathematik-Bachelor-Studiengängen. Diese Tendenz zeigt sich auch bei einer differenzierteren Betrachtung der verschiedenen Lehramtsstudiengänge, insbesondere bei Gymnasiallehramtsstudierenden (Dieter & Törner, 2012, 2013). Da Fach-Bachelor und Gymnasiallehramtsstudierende im Fach Mathematik zu Studienbeginn in der Regel überwiegend dieselben Fachveranstaltungen besuchen, sind diese Unterschiede eher nicht auf Unterschiede im fachlichen Niveau verschiedener Lehrveranstaltungen zurückzuführen.

Tabelle 1. Anteil weiblicher Personen im Mathematikstudium in Prozent.

	Studierende			1. Fachsemester			Abschluss		
Studienjahr	17/18	18/19	19/20	17/18	18/19	19/20	2017	2018	2019
Lehramt Mathematik	62	62	62	63	64	63	63	64	66
Mathematik Bachelor	41	41	41	44	45	44	40	37	39
Mathematik Master	33	33	33	36	32	34	34	32	34
Promotion Mathematik	28	28	28	29	31	31	26	29	25
Gesamt	46	47	46	48	49	49	46	45	47

Quelle: Statistisches Bundesamt, Fachserie 11, Reihen 4.1 und 4.2.

Theoretischer Hintergrund

Geschlechtsspezifische Leistungsunterschiede im Fach Mathematik

Durch Leistungsunterschiede lässt sich die Unterrepräsentation von Frauen nicht erklären: Studiengangübergreifend erzielen Frauen im Studium bessere Noten als Männer (Ramm & Bargel, 2005; Richardson et al., 2012; Schneider & Preckel, 2017). Im Studienfach Mathematik ist die Befundlage uneindeutig. Hier existieren sowohl Studien, die keine Unterschiede nachweisen (Abele et al., 2004; Abele & Krüsken, 2000), als auch Studien, die minimale Vorteile der Männer (Grözinger, 2017), insbesondere bei den überdurchschnittlich guten Leistungen (Dieter et al., 2008), oder minimale Vorteile der Frauen zeigen (Alcock et al., 2014; Stout et al., 2011). In der Schule erreichen Mädchen bessere Noten als Jungen, auch im Fach Mathematik (Hannover & Kessels, 2011; Helbig, 2012).

In internationalen Vergleichsstudien wie PISA (Prenzel et al., 2013) oder TIMSS (Baumert et al., 2013) erzielen deutsche Schüler etwas bessere Ergebnisse als deutsche Schülerinnen. Dieser Effekt zeigt sich bei Gymnasialschüler:innen besonders deutlich und ist auf eine höhere gymnasiale Bildungsbeteiligung von Mädchen zurückzuführen (Baumert et al., 2013). In länderübergreifenden Metastudien sind solche Unterschiede nicht mehr zu finden oder vernachlässigbar klein (Else-Quest et al., 2010; Forgasz & Leder, 2017; Lindberg et al., 2010).

Persönlichkeitseigenschaften und Geschlechterstereotype als Erklärungsansätze für Leaky Pipeline und Studienleistungen

Bei differenzierter Betrachtung unterschiedlicher Leistungsmaße zeigt sich also die Tendenz, dass Männer in der Mathematik in standardisierten Leistungstests (wie z. B. in PISA und TIMSS) besser abschneiden, wohingegen Frauen bessere Mathematiknoten erzielen. Möglicherweise liegt Frauen eine gut vorzubereitende Leistungserfassung, wie sie in Schul- und Studiennoten abgebildet ist, also eher, wohingegen Männern für Teilnehmende weniger berechenbare Testsituationen eher liegen.

Diese These wird vom sogenannten „female underprediction effect“ gestützt, der das Phänomen beschreibt, dass Studierfähigkeitstests (wie z. B. die im amerikanischen Raum

verbreiteten SAT oder ACT) spätere Studienleistungen von Frauen eher unterschätzen (Fischer et al., 2013; Leonard & Jiang, 1999; Niessen et al., 2019). Neuere Studien zeigen, dass dieser Effekt zu einem großen Teil durch Unterschiede in Persönlichkeitseigenschaften, insbesondere in der Gewissenhaftigkeit, zwischen Frauen und Männern erklärt werden kann (Keiser et al., 2016; Kling et al., 2013; Mattern et al., 2017). Gemessen an ihrer späteren Leistung schneiden also insbesondere solche Personen in diesen Tests schlecht ab, die sich auf berechenbare Prüfungen besonders gut vorbereiten würden. Auch für das Mathematikstudium zeigt sich, dass Leistungsunterschiede durch Persönlichkeitseigenschaften, insbesondere durch Verträglichkeit (Altruismus, Hilfsbereitschaft) und Gewissenhaftigkeit, deutlich besser erklärt werden können als durch das Geschlecht (Alcock et al., 2014).

Dementsprechend sind Erklärungsansätze für die Leaky Pipeline, dass also Frauen zunehmend seltener in höheren Stufen der akademischen Laufbahn der wissenschaftlichen Mathematik zu finden sind, unter anderem auch in Persönlichkeitseigenschaften und der Art der Partizipation am mathematischen Diskurs zu suchen. Metastudien zeigen, dass Frauen sich bei Verträglichkeit, Extraversion, Gewissenhaftigkeit, aber auch Neurotizismus höher einschätzen als Männer (Hyde, 2014; Schmitt et al., 2008; Weisberg et al., 2011). Mit Blick auf das Fach Mathematik ist zudem relativ gut belegt, dass Frauen generell eine niedrigere mathematikbezogene Selbstwirksamkeitserwartung, ein niedrigeres mathematikbezogenes Selbstkonzept, ein geringeres Interesse an Mathematik, aber eine höhere mathematikbezogene Ängstlichkeit zeigen – sowohl in der Schule, im Fachstudium als auch in mathematikhaltigen Studiengängen (Else-Quest et al., 2010; Huang, 2013, 2016; Johns, 2020; Pomerantz et al., 2002; Sax et al., 2015; Sheu et al., 2018). Möglicherweise sind diese Faktoren allerdings schon bei der Studienwahl derart entscheidend, dass sie sich bei Kontrolle von Studiengängen nicht mehr zeigen (Liebendörfer et al., eingereicht).

Eine mögliche Erklärung für diese Unterschiede lässt sich anhand geschlechtsbezogener Sozialisation (Nosek & Smyth, 2011) und bestehender Geschlechterstereotypen rekonstruieren. Allgemein werden Männern und Frauen unterschiedliche Eigenschaften, Interessen, Kompetenzen und Rollen zugesprochen (Kollmayer et al., 2018). Männer werden eher als aggressiv, stark, unabhängig und entschieden charakterisiert, wohingegen Frauen eher als nett, hilfreich, schön und um andere besorgt beschrieben werden (Kollmayer et al., 2018). Mathematikspezifische Sozialisationen reproduzieren diese Stereotype häufig: Mädchen werden als „nicht gut in Mathematik“ oder „nur gut, weil sie sehr fleißig sind“ beschrieben, während Talent und Begabung vor allem auf Jungen attribuiert werden (Forgasz & Leder, 2017; Jaremus et al., 2020; Kaiser et al., 2012; Kollmayer et al., 2018). Solche Geschlechterstereotype machen eine Befangenheit im Hinblick auf die Passung von Frauen zur Mathematik deutlich, sowohl mit Blick auf das ihnen zugeschriebene Talent als auch mit Blick auf die Vereinbarkeit von Geschlechterstereotypen und der Mathematik zugeschriebenen Eigenschaften, wie der “culture of rationality, which values reason but denigrates feeling. […] It represents the aggressive masculine half of human nature, which has rejected the receptive and compassionate feminine half” (Ernest, 2002, S. 279). Die höhere (selbstberichtete) Gewissenhaftigkeit und Verträglichkeit von Frauen sowie ein höheres mathematikbezogenes Selbstkonzept und eine höhere mathematikbezogene Selbstwirksamkeitserwartung von Männern entsprechen also diesen Geschlechterstereotypen.

Lernstrategien stellen eine Möglichkeit dar, Zusammenhänge dieser Stereotype mit einem geschlechtsspezifischen Lernverhalten genauer zu untersuchen (Wild, 2005). Studiengangübergreifend berichten Frauen einen höheren Einsatz von Wiederholungs- und Organisationsstrategien, eine größere Anstrengungsbereitschaft sowie höhere Werte bei Zeitmanagement, Gestaltung des Arbeitsplatzes und der Verwendung von Literatur (Ruffing et al., 2015; Schiefele et al., 2003). Auch im mathematikhaltigen Studium berichten Frauen einen höheren Einsatz von Wiederholungs- und Organisationsstrategien, eine höhere Anstrengungsbereitschaft und Frustrationstoleranz sowie ein häufigeres Lernen mit Kommiliton:innen (Johns, 2020; Liebendörfer et al., 2020, eingereicht). Darüber hinaus versuchen einige Frauen im Mathematikstudium maskulinere Verhaltensweisen anzunehmen (Solomon, 2012), andere sind eher still und unsichtbar (Rodd & Bartholomew, 2006). Insgesamt fällt es Frauen schwerer sich in die Fachkultur zu integrieren und eine fachbezogene Identität zu bilden (Solomon et al., 2011). Gute Beziehungen und Eingebundenheit, z. B. zu Tutor:innen, sind für Mathematikstudentinnen wichtiger für ihre Studienzufriedenheit als für Mathematikstudenten (Solomon et al., 2011, 2016).

Mögliche Auswirkungen von Persönlichkeitseigenschaften und Geschlechterstereotypen auf Leistungen in verschiedenen Prüfungsformen

Diesen Ausführungen entsprechend kann mit Blick auf verschiedene Prüfungsformen also argumentiert werden, dass Prüfungssituationen, die (zumindest zu einem gewissen Grad) überschaubar und planbar sind und bei denen deshalb Erfolg und Prüfungsängste durch eine gewissenhafte Vorbereitung mithilfe geeigneter Lernstrategien kontrolliert werden können, eher dem weiblichen Stereotyp gerecht werden. Prüfungsformen hingegen, die spontane Entscheidungen und ggf. auch eine gewisse Risikobereitschaft sowie ein höheres Selbstvertrauen erfordern, entsprechen eher dem männlichen Stereotyp. Diese Überlegungen können zur Erklärung von Geschlechterunterschieden bei Noten und standardisierten Tests und insbesondere auch des „female underprediction effects“ beitragen. Darüber hinaus wird diese Argumentation von einer Studie zu Examensnoten von Jura-Studierenden gestützt (Towfigh et al., 2014): Frauen schneiden hier in Klausuren im Vergleich mit Männern mit Blick auf ihre Abiturnoten unerwartet schlecht ab und können sich durch das Üben in Probeklausuren auch weniger stark verbessern als Männer. In mündlichen Prüfungen (die ein noch selbstbewussteres und spontaneres Auftreten erfordern) sind diese Geschlechterunterschiede noch größer (und finden sich sogar unter Kontrolle der Klausurnoten).

Mit Blick auf die Leaky Pipeline, die sich im Mathematikstudium schon direkt zu Studienbeginn zeigt, kann also eine genauere Betrachtung des wöchentlichen Bearbeitens von Übungsaufgaben und von universitären Mathematikklausuren, die die beiden in Deutschland verbreitetsten Prüfungsformen für den Modulerfolg zu Studienbeginn darstellen, interessant sein. Tatsächlich zeigt sich hier, dass das Erreichen der notwendigen Punkte für die Übungsaufgaben Mathematikstudierende im ersten Semester zwar vor große Herausforderungen stellt, aber mithilfe von Anstrengungsbereitschaft, Frustrationstoleranz und des gemeinsamen Bearbeitens von Übungsaufgaben mit Kommiliton:innen weitestgehend kontrollierbar ist (Göller, 2020; Liebendörfer, 2018). Die Anforderungen der Klausuren sind hingegen für die meisten Mathematikstudierenden im ersten Semester kaum einschätzbar und

so eine wesentliche Ursache für Prüfungsängste (Göller, 2020; Göller & Rück, eingereicht). Entsprechend der obigen Ausführungen wäre zu erwarten, dass Frauen tendenziell bei den Übungsaufgaben und Männer eher in den Klausuren besser abschneiden.

Forschungsfragen

Im Folgenden sollen also mit Blick auf den Beginn des Mathematikstudiums und die dort meistens vertretenen Prüfungsformate folgende Fragen untersucht werden:

Frage 1: Lassen sich Geschlechterunterschiede in verschiedenen Prüfungsformaten zur Erfassung mathematischer Leistungen zu universitären Lehrveranstaltungen feststellen?

Zur Beantwortung dieser Frage sind sowohl studiengangübergreifende Untersuchungen als auch eine genauere Betrachtung einzelner Studiengänge interessant, insbesondere auch um möglicherweise verschiedene Tendenzen in verschiedenen Studiengängen aufzudecken und Effekte, die ggf. auf unterschiedliche geschlechtsspezifische Zusammensetzungen der Studiengänge zurückzuführen sind (vgl. **Tabelle *1***), zu kontrollieren.

Frage 2: Zeigen sich geschlechtsspezifische Unterschiede des Zusammenhangs von verschiedenen Prüfungsformaten?

Hier soll untersucht werden, ob sich möglicherweise unterschiedliche Korrelationsmuster zwischen verschiedenen Prüfungsformaten für weibliche und männliche Studierende ergeben. Zudem soll untersucht werden, ob weibliche und männliche Studierende in Teilgruppen mit unterschiedlichen Zusammenhängen zwischen Prüfungsformaten möglicherweise verschieden repräsentiert sind.

Methode

Stichprobe

Zur Untersuchung dieser Fragestellungen wurden Leistungsdaten von 423 Mathematikstudierenden (192 weiblich, 204 männlich) aus sechs verschiedenen Lehrveranstaltungen (Analysis I, Lineare Algebra, Grundlagen der Mathematik, Einführung in die Kultur der Mathematik) an drei verschiedenen Universitäten untersucht. 117 Studierende (davon 42 weiblich) waren für einen Mathematik-Bachelorstudiengang eingeschrieben, 165 (davon 93 weiblich) für ein gymnasiales Lehramtsstudium mit dem Fach Mathematik, 102 (davon 61 weiblich) für ein Lehramt an Haupt-, Real-, Sekundar- und Gesamtschulen, 19 (davon 9 weiblich) für ein Lehramt an beruflichen Schulen, 12 (davon 3 weiblich) für ein Physik Bachelorstudium, 8 (davon 4 weiblich) für einen sonstigen mathematikhaltigen Studiengang (siehe **Tabelle *2***).

Tabelle 2: Anzahlen der Studierenden in den untersuchten Lehrveranstaltungen.

Veranstaltung	Vorgesehenes Semester	Gesamtanzahl (davon weiblich)	Nicht-Lehramt (davon weiblich)	Lehramt (davon weiblich)
1 Grundlagen der Mathematik	1	68 (36)	25 (10)	43[a] (26)
2 Lineare Algebra	2	63 (27)	17 (6)	23[a] (16)
3 Grundlagen der Mathematik	1	85 (41)	16 (5)	69[a] (36)
4 Analysis I	1 oder 3	128 (52)	79 (28)	49[a] (24)

5 Kultur der Mathematik	1	62 (37)	-	62[b] (37)
6 Kultur der Mathematik	1	40 (24)	-	40[b] (24)
Gesamt	-	423 (192)	137 (49)	286 (163)

Anmerkungen: [a]gymnasiales oder Berufsschullehramt, [b]Lehramt an Haupt-, Real-, Sekundar- und Gesamtschulen

Datenerhebung

Die Prüfungsformate in allen genannten Lehrveranstaltungen bestanden aus Übungsaufgaben, die wöchentlichen bearbeitet, eingereicht und bewertet wurden, und einer schriftlichen Klausur am Semesterende. Zum Bestehen der zugehörigen Module mussten jeweils 50 % der auf den Übungsaufgaben möglichen Punkte erreicht und die Klausur bestanden werden. In fünf der sechs Lehrveranstaltungen wurde die Abschlussnote der jeweiligen Module durch die Klausur bestimmt. In der Lehrveranstaltung zur Analysis I wurden auf der Grundlage der hier untersuchten Prüfungsformen keine Noten vergeben. Die Klausur konnte lediglich bestanden oder nicht bestanden werden. Zudem konnte ein Sechstel der für das Bestehen der Klausur notwendigen Punkte durch die Teilnahme an einer Projektarbeit vorab erreicht werden. Die vorliegende Auswertung berücksichtigt diese Punkte für die Projektarbeit nicht, da hier der Fokus auf Übungsaufgaben sowie in einer Klausur erzielten Punkte liegt. In der Lehrveranstaltung zur Analysis I konnten Lösungen zu den Übungsaufgaben in Gruppen von ein bis maximal drei Studierenden abgegeben werden. In allen anderen Lehrveranstaltungen wurden die Lösungen zu den Übungsaufgaben einzeln eingereicht. Die mit den Übungsaufgaben erreichten Punkte hatten in allen Veranstaltungen (abgesehen von der notwendigen Punktzahl zur Zulassung) keinen Einfluss auf die Abschlussnote der jeweiligen Module.

Zu beachten ist, dass zwei der sechs Lehrveranstaltungen (Vorlesung 4 und Vorlesung 6) aufgrund der COVID-19-Pandemie nicht in Präsenz stattfanden. Die anderen vier Veranstaltungen lagen vor der Pandemie.

Das biologische Geschlecht der Studierenden wurde anhand von Einschreibungsdaten rekonstruiert.

Datenauswertung

Um trotz der unterschiedlichen Gegebenheiten der verschiedenen Lehrveranstaltungen eine Vergleichbarkeit der Daten zu erreichen, wurden für jede der sechs Veranstaltungen die durch die Übungsaufgaben und Klausur erreichten Punkte für genau die Personen, für die Klausurergebnisse vorliegen, einzeln z-standardisiert. Falls eine Person bei Klausuren für ein Modul sowohl an Erst- als auch an Zweittermin teilnahm, wurde sie der Klausur des Zweittermins zugeordnet, um Doppelungen zu vermeiden (dies betraf 6 Personen).

Die so standardisierten Datensätze wurden zusammengeführt und mit SPSS 26 weiter analysiert. Für Frage 1 wurden univariate Varianzanalysen durchgeführt. Für Frage 2 wurden einerseits Korrelationen zwischen Punkten für die Übungsaufgaben und Klausurpunkten für verschiedene Studierendengruppen berechnet. Ergänzend wurde eine K-Means-Clusteranalyse für vier Faktoren für Übungs- und Klausurpunkte zur Identifikation homogener Gruppen, aufgrund folgender theoretischer Überlegung, durchgeführt: Zur genaueren Untersuchung des Zusammenhangs der Punkte für die Übungsaufgaben und der anschließend erreichten Punkte in der Klausur sind vier Gruppen interessant: Erstens, die Gruppe der Personen, die sowohl bei

den Punkten für die Übungsaufgaben als auch in der Klausur als überdurchschnittlich *leistungsstark* sind ($++$). Zweitens, eine *klausurstarke* Gruppe, deren Klausur besser ausfällt ist als die erreichten Punkte für die Übungsaufgaben vermuten lassen ($\mp$). Drittens, eine *klausurschwächere* Gruppe, deren Klausur schlechter ausfällt als die erreichten Punkte für die Übungsaufgaben vermuten lassen ($\pm$). Und viertens, die Gruppe der Studierenden, die sowohl bei den Punkten für die Übungsaufgaben als auch in der Klausur *leistungsschwächer* sind ($--$).

Ergebnisse

Deskriptive Statistiken der z-standardisierten Leistungsdaten für verschiedene Studierendengruppen sind in **Tabelle *3*** dargestellt. Eine univariate Varianzanalyse der Punkte für die Übungsaufgaben als abhängige Variable mit Geschlecht (weiblich, männlich) und Studienganggruppe (Nicht Lehramt, Lehramt) als festen Faktoren identifiziert einen kleinen Effekt des Studiengangs ($F(3,393) = 5.75$, $p < 0.05$, $\eta_p^2 = 0.014$). Sowohl das Gesamtmodell als auch das Geschlecht und die Interaktion von Geschlecht und Studienganggruppe haben keinen signifikanten Effekt auf die Punkte für die Übungsaufgaben.

Eine univariate Varianzanalyse der Punkte in den Klausuren als abhängige Variable mit Geschlecht (weiblich, männlich) und Studienganggruppe (Nicht Lehramt, Lehramt) als festen Faktoren identifiziert einen kleinen Effekt des Gesamtmodells ($F(3,419) = 5.61$, $p = 0.001$, $\eta_p^2 = 0.039$). Hier zeigen sich auch kleine Effekte des Geschlechts ($F(1,419) = 10.21$, $p = 0.002$, $\eta_p^2 = 0.024$) und der Interaktion von Geschlecht und Studienganggruppe ($F(1,419) = 4.56$, $p < 0.05$, $\eta_p^2 = 0.011$) auf die Punkte in den Klausuren. Die Studienganggruppe zeigt hier keinen signifikanten Effekt auf die Punkte in den Klausuren.

Tabelle 3. Deskriptive Statistiken der z-standardisierten Leistungsdaten zu verschiedenen Studierendengruppen.

	Gesamt			weiblich			männlich			Unterschiede		
Prüfungsform	*N*	*M*	*SD*	*N*	*M*	*SD*	*N*	*M*	*SD*	*t*	*p*	*d*
Übungsaufgaben	397	0	1	192	-0.02	1.05	204	0.02	0.94	-0.44	.66	-0.05
Nicht Lehramt	134	0.18	1.05	47	0.10	1.12	87	0.22	1.01	-0.64	.53	-0.11
Lehramt	263	-0.09	0.94	145	-0.06	1.03	118	-0.13	0.86	0.55	.58	0.06
Klausur	423	0	1	212	-0.14	0.97	210	0.14	1.00	-2.95	.003	-0.29
Nicht Lehramt	137	0.16	1.07	49	-0.20	1.07	88	0.36	1.03	-3.04	.003	-0.56
Lehramt	286	-0.08	0.95	163	-0.12	0.94	123	-0.02	0.96	-0.94	.35	-0.11

Abbildung *1* visualisiert die Mittelwertunterschiede in diesen verschiedenen Studienganggruppen sowohl über alle als auch die einzelnen hier untersuchten Lehrveranstaltungen. Darüber hinaus wurden einzelne *t*-Tests zu Geschlechterunterschieden für die verschiedenen Studienganggruppen gerechnet, die in **Tabelle *3*** aufgeführt sind.

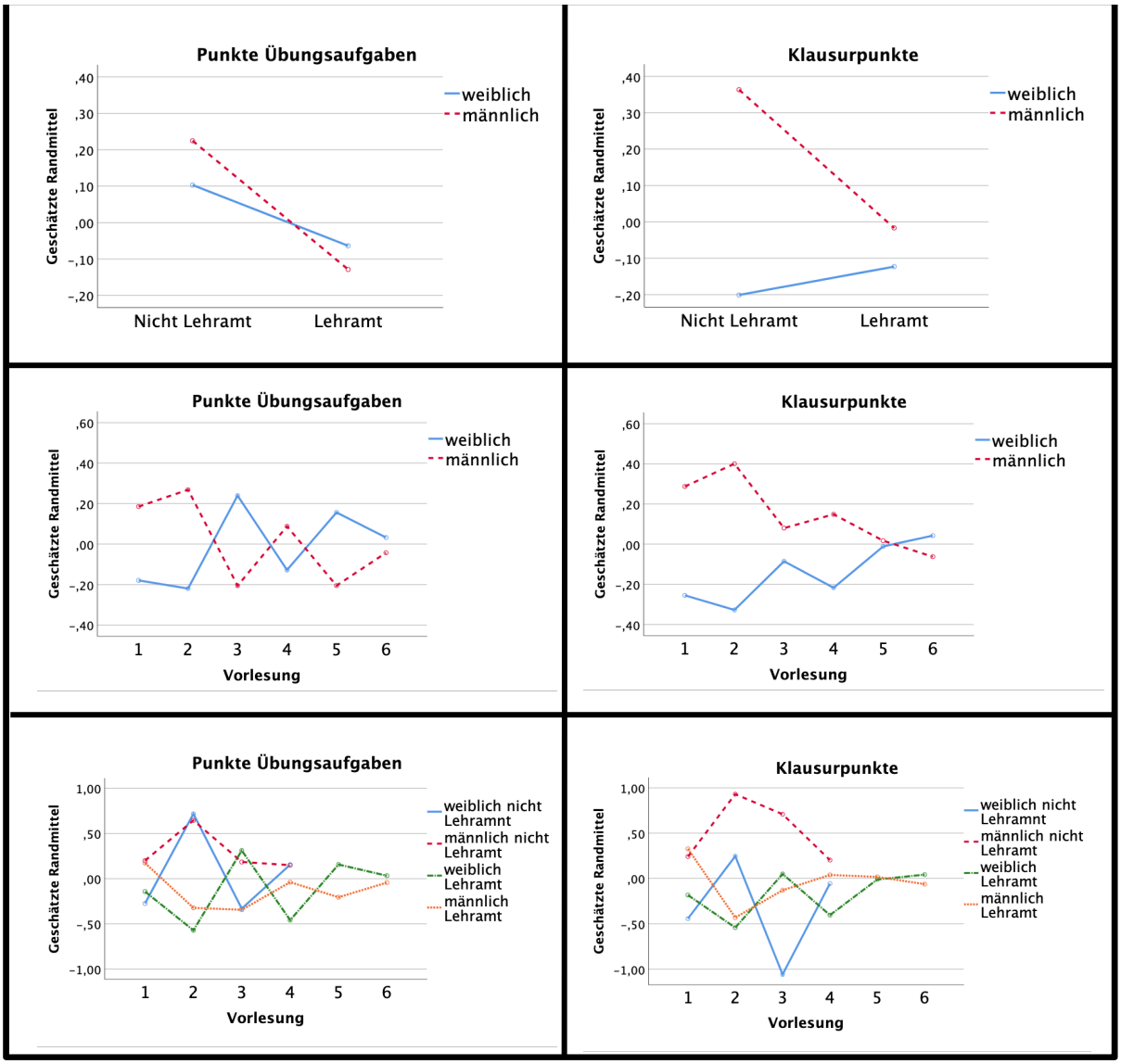


Abbildung 1. Mittelwertunterschiede verschiedener Studierendengruppen.

Zur Beantwortung von Frage 2 sind in **Tabelle 4** die bivariaten Korrelationen der Punkte für die Übungsaufgaben mit den Klausurpunkten aufgeführt. Da sich die Prüfungsformate für Vorlesung 4 (Abgabe der Übungsaufgaben in Gruppen, keine Klausurnote, s. o.) etwas von denen der anderen Vorlesungen unterschieden, sind in **Tabelle 4** diese Korrelationen zudem für Vorlesung 4 sowie die anderen Vorlesungen gesondert aufgeführt. Die geschlechtsspezifischen Unterschiede in den jeweiligen Studienganggruppen sind nur über alle Studierenden in Vorlesung 4 (Fishers $z = 2.10$, $p < 0.05$) signifikant. Zudem unterscheiden sich die Korrelationen von Nicht-Lehramts- und Lehramtsstudierenden in Vorlesung 4 (Fishers $z = 2.14$, $p < 0.05$). Alle anderen Unterschiede sind nicht signifikant.

Tabelle 4. Korrelationen der Prüfungsformate und Personenanzahlen in den Clustern.

	Korrelationen	Anzahl Personen in Cluster

	r	$r_{\neg 4}$	r_4	$++$	$\mp$	$\pm$	$--$
Gesamt	.40	.49	.21	101	133	79	84
weiblich	.46	.47	.42[a]	47	55[c]	42	48
männlich	.35	.54	n. S.[a]	54	78[c]	37	36
Nicht Lehramt	.31	.63	n. S.[b]	41	43	29	21
weiblich	.43	.62	n. S.	12	12	13	10
männlich	.23	.64	n. S.	29	31	16	11[d]
Lehramt	.44	.44	.45[b]	60	90	50	63
weiblich	.48	.44	.62	35	43	29	38[d]
männlich	.41	.45	n. S.	25	47	21	25

Bivariate Korrelationen ($r$alle Befragten, $r_{\neg 4}$ohne Vorlesung 4, $r_4$nur Vorlesung 4) zwischen Punkten für die Übungsaufgaben und Klausurpunkten sowie die Anzahlen der Personen aus den jeweiligen Studierendengruppen in den verschiedenen Clustern. Alle angegebenen Korrelationen sind auf dem Niveau von 0.05 (2-seitig) signifikant. Alle Korrelationen größer .3 sind auf dem Niveau von 0.01 (2-seitig) signifikant. [a, b] Die Korrelationen unterscheiden sich bei gleichen Buchstaben auf dem Niveau von 0.05 (2-seitig) signifikant. [c, d] Die Anteile unterscheiden sich bei gleichen Buchstaben auf dem Niveau von 0.05 signifikant voneinander.

Die K-Means Clusteranalyse mit vier Faktoren identifiziert die im Methodenteil angenommenen Cluster (vgl. **Abbildung *2***):

- Cluster $++$ enthält Studierende, die sich sowohl bei den erreichten Punkten für die Übungsaufgaben als auch in der Klausur als überdurchschnittlich *leistungsstark* herausgestellt haben. Die *z*-standardisierten Mittelwerte von Studierenden dieser leistungsstarken Gruppe liegen bei M = 1.16 bei den Punkten für die Übungsaufgaben und M = 0.95 bei den Klausurpunkten.
- Cluster $\mp$ enthält überwiegend Studierende, deren Klausur besser ausgefallen ist als die erreichten Punkte für die Übungsaufgaben vermuten lassen. Die *z*-standardisierten Mittelwerte von Studierenden dieser unerwartet *klausurstarken* Gruppe liegen bei $M = -0.41$ bei den Punkten für die Übungsaufgaben und M = 0.51 bei den Klausurpunkten.
- Cluster $\pm$ enthält überwiegend Studierende, deren Klausur schlechter ausgefallen ist als die erreichten Punkte für die Übungsaufgaben vermuten lassen. Die *z*-standardisierten Mittelwerte von Studierenden dieser unerwartet

klausurschwachen Gruppe liegen bei M = 0.37 bei den Punkten für die Übungsaufgaben und $M = -0.74$ bei den Klausurpunkten.

- Cluster − − enthält überwiegend Studierende, die sich sowohl bei den erreichten Punkten für die Übungsaufgaben als auch in der Klausur als *leistungsschwächer* herausgestellt haben. Die *z*-standardisierten Mittelwerte von Studierenden dieser leistungsschwächeren Gruppe liegen bei $M = -1.09$ bei den Punkten für die Übungsaufgaben und $M = -1.12$ bei den Klausurpunkten.

Abbildung *2* zeigt ein Streudiagramm dieser vier Cluster sowie ein Balkendiagramm der Verteilung weiblicher und männlicher Studierender auf diese Cluster. In Tabelle 4 ist zudem die Verteilung auf die Cluster auch mit Blick auf die beiden Studienganggruppen aufgeführt. Studiengangübergreifend sind in der klausurstarken Gruppe (Cluster ∓) männliche Studierende signifikant häufiger vertreten. Alle anderen Unterschiede in den Verteilungen auf die Cluster sind nicht signifikant.

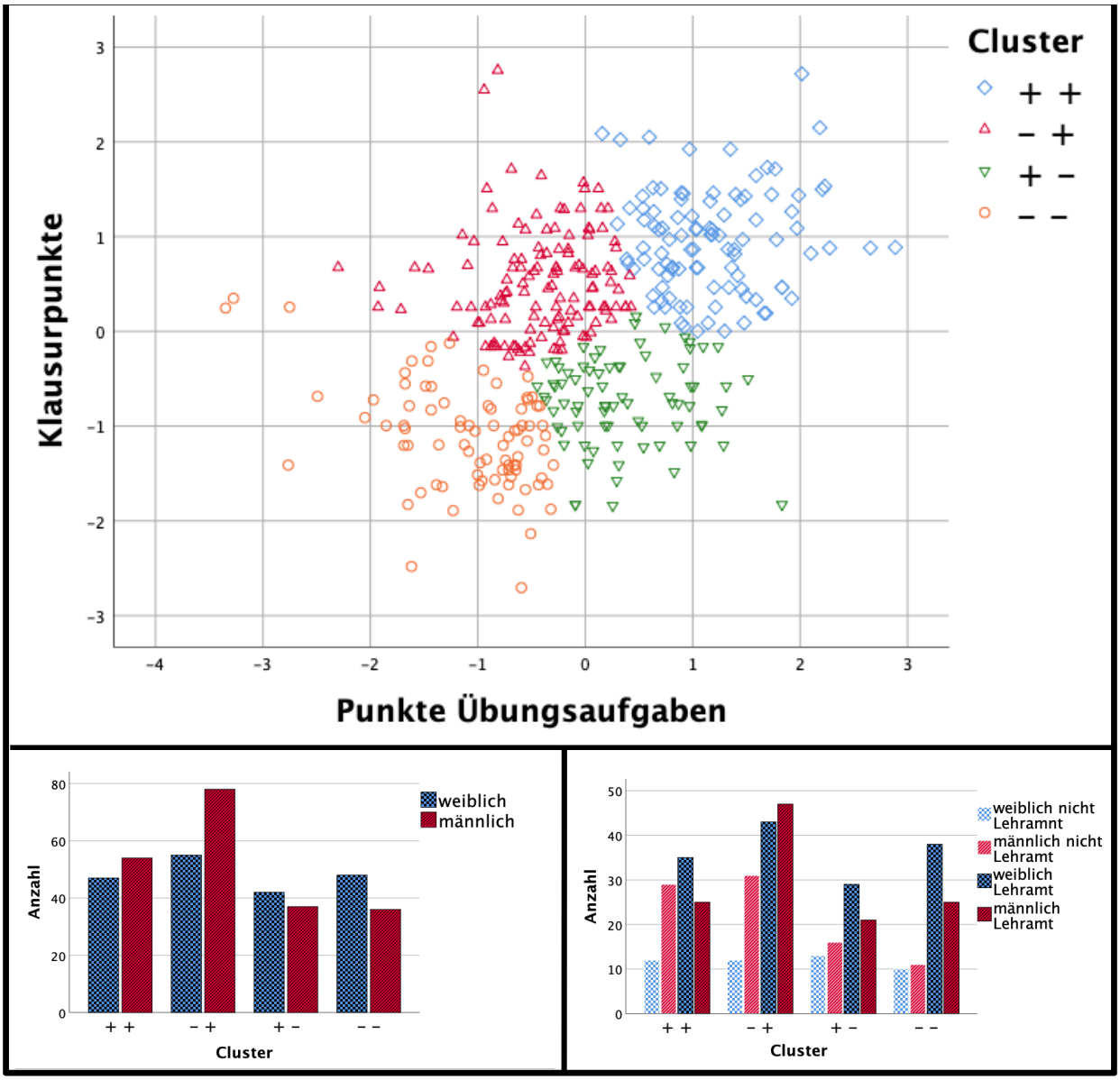


Abbildung 2. Verteilung der Studierenden auf die vier Cluster. Cluster + + leistungsstarke, Cluster ∓ klausurstarke, Cluster ± klausurschwache, Cluster − − leistungsschwächere.

Diskussion

Zusammenfassung der Ergebnisse und Beantwortung der Forschungsfragen

Mit Blick auf Frage 1 zeigen sich bei den Punkten für die Übungsaufgaben sowohl bei Betrachtung aller untersuchten Studierenden als bei der gesonderten Betrachtung von Nicht-Lehramts- und Lehramtsstudierenden keine Geschlechterunterschiede. Bei den Klausurpunkten zeigen sich hingegen signifikante, wenn auch als klein zu interpretierende, Geschlechterunterschiede bei Betrachtung aller untersuchten Studierenden. Diese sind nicht allein durch eine unterschiedliche geschlechtsspezifische Zusammensetzung der beiden betrachteten leistungsheterogenen Studienganggruppen Nicht-Lehramt und Lehramt zu begründen. Vielmehr zeigen sich diese Geschlechterunterschiede vor allem in den hier untersuchten Nicht-Lehramtsstudiengängen.

Die in Tabelle 4 aufgeführten Korrelation sind, bis auf eine Ausnahme, alle nicht signifikant verschieden und lassen entsprechend keine geschlechterspezifischen Muster erkennen. Die Betrachtung der vier Cluster zeigt hier, dass es männlichen Studierenden signifikant häufiger gelingt trotz verhältnismäßig schwächerer Leistungen bei den Übungsaufgaben verhältnismäßig bessere Klausurleistungen zu erzielen (Cluster $\mp$, klausurstarke). Mit Blick auf Frage 2 lässt sich also festhalten, dass das im Vergleich zu den Übungsaufgaben bessere Abschneiden männlicher Studierender in den Klausuren eher nicht allein durch einen generell unterschiedlichen geschlechtsspezifischen Zusammenhang zwischen Übungs- und Klausurleistungen, sondern vor allem auch durch einen größeren Anteil männlicher Studierender in der klausurstarken Gruppe zu begründen ist.

Diskussion der Ergebnisse

Bei der Interpretation der Leistungsunterschiede zwischen Fach- und Lehramtsstudierenden muss berücksichtigt werden, dass Lehramtsstudierende in der Regel schon im ersten Semester und vor allem im weiteren Verlauf des Studiums weniger Gelegenheiten zum Lernen von Mathematik zur Verfügung stehen als Fachstudierenden (z. B. weil ihre Studienverlaufspläne weniger fachmathematische Lehrveranstaltungen vorsehen und ihnen aufgrund ihrer anderen Fächer insgesamt weniger Zeit für das Lernen von Mathematik bleibt). Dementsprechend ist hier vor allem bemerkenswert, dass sich das theoretisch erwartete Muster, dass Frauen ihre Stärken eher bei den Punkten für die Übungsaufgaben (die mithilfe gewissenhaften Arbeitens durch Anstrengungsbereitschaft, Frustrationstoleranz und dem gemeinsamen Bearbeiten von Übungsaufgaben mit Kommiliton:innen eher kontrollierbar sind (Göller, 2020; Liebendörfer, 2018)) zeigen und Männer in schriftlichen Klausuren (bei denen eher spontane Entscheidungen und ggf. auch eine gewisse Risikobereitschaft sowie ein höheres Selbstvertrauen wichtig sind) eher ihre Vorteile haben, in der Tendenz in beiden Studienganggruppen bestätigt. Alarmierend sind hier vor allem die vergleichsweise großen Geschlechterunterschiede bei Fachstudierenden. Auch wenn diese aufgrund der relativ geringen Anzahl an Nicht-Lehramtsstudentinnen in der vorliegenden Studie nur vorsichtig interpretiert werden sollten, passen sie zu den anfangs genannten Befunden (**Tabelle *1***), dass Frauen ihr Bachelor-Mathematik-Studium schon nach dem ersten Semester häufiger abbrechen als Männer und auch vergleichsweise seltener abschließen – insbesondere, wenn man bedenkt, dass Leistungsprobleme als Hauptursache für den Studienabbruch angesehen werden können (Heublein et al., 2017).

Darüber hinaus ist mit Blick auf die meistens etwas höhere mathematikbezogenen Selbstwirksamkeitserwartung männlicher Studierender theoretisch erwartbar, dass Frauen bei negativen Klausurerfahrungen ihr Studium eher abbrechen als Männer. Dass sich diese Effekte bei Lehramtsstudierenden eher nicht zeigen, kann möglicherweise durch deren stärker berufsbezogene und weniger fachinteressenbezogene Studienwahlmotive (Göller & Besser, in Druck; Neugebauer, 2013) erklärt werden. Tatsächlich sind Leistungsprobleme für Lehramtsstudierende ein etwas weniger entscheidender Abbruchgrund als für Fachstudierende (Heublein et al., 2017). Hier zeigen qualitative Studien, dass Mathematiklehramtsstudierende sich eher als zukünftige Lehrer:innen positionieren und den Erwerb fachmathematischen Wissens dafür als wenig relevant empfinden (Geisler et al., 2019; Gildehaus, angenommen).

Die in **Tabelle 4** berichteten Korrelationen fallen insgesamt relativ niedrig aus, wenn man bedenkt, dass sowohl Übungsaufgaben als auch die Klausuren mathematische Inhalte der jeweils selben Lehrveranstaltung behandeln. Die zur erfolgreichen Bearbeitung von Übungsaufgaben und Klausuren notwendigen Fähigkeiten scheinen sich also teilweise zu überschneiden, zu einem nicht unerheblichen Teil aber auch verschieden zu sein. Das bedeutet, dass ein gewissenhaftes Bearbeiten der Übungsaufgaben nicht notwendigerweise auch zu besseren Klausurleistungen führt. Dies könnte zusammen mit den schon erwähnten Schwierigkeiten von Mathematikstudierenden im ersten Semester bei der Einschätzung von Klausuranforderungen (Göller, 2020; Göller & Rück, eingereicht) zur Erklärung des etwas schlechteren Abschneidens der Frauen in den Klausuren beitragen. Zu beachten ist allerdings auch, dass aufgrund der teilweisen Möglichkeit zur Abgabe der Übungsaufgaben in Kleingruppen (Vorlesung 4) sowie der generellen Möglichkeit Übungsaufgaben in Gruppen zu bearbeiten und ggf. auch Lösungen von Kommiliton:innen oder aus anderen Quellen abzuschreiben, die Punkte für die Übungsaufgaben für manche Personen keine validen Leistungsmessungen darstellen. Hier zeigt sich, dass zwar insgesamt Lehramtsstudierende etwas häufiger abschreiben als Fachstudierende, es finden sich hierbei aber keine Geschlechterunterschiede (Liebendörfer & Göller, 2016a, 2016b). Zudem könnten leistungsstarke Studierende, nachdem sie die notwendigen 50 % der erreichbaren Punkte überschritten haben, weniger Aufgaben abgeben und so am Ende schwerer von anderen Studierenden zu unterscheiden sein.

Die Tendenzen, dass Frauen bei den Punkten für die Übungsaufgaben vergleichsweise besser und Männer in schriftlichen Klausuren vergleichsweise besser abschneiden, zeigt sich auch bei Betrachtung der vier Cluster: Unter den klausurschwachen und leistungsschwächeren finden sich mehr Frauen, unter den leistungsstarken und klausurstarken mehr Männer, auch wenn diese Unterschiede nur in der klausurstarken Gruppe signifikant sind. Unklar ist hier, welche Rollen z. B. das Vorwissen, die Einschätzbarkeit der Klausuranforderungen, unterschiedliche Lernstrategien oder auch die klausurbezogene Selbstwirksamkeitserwartung bei der Zusammensetzung der Cluster spielen. So kann spekuliert werden, dass Personen aus der klausurstarken Gruppe möglicherweise (z. B. auch erst nach Erreichen der notwendigen Punkte für die Übungsaufgaben) stärker auf klausurrelevante Inhalte fokussieren und ihren Fokus nicht nur oder nicht so sehr auf das Erreichen vieler Übungsblattpunkte legen (was möglicherweise das Vorgehen in der klausurschwachen Gruppe ist). Auch wenn sich zu diesen Vorgehensweisen Entsprechungen in den Genderstereotypen finden, müsste erst noch empirisch untersucht werden, inwiefern das Entstehen der Cluster durch solche Unterschiede in den Vorgehensweisen erklärt werden könnte und welchen Einfluss das Geschlecht bzw.

Geschlechterstereotype darauf haben. Bemerkenswert ist an dieser Stelle, dass nur für die weiblichen Nicht-Lehramtsstudierenden das klausurstarke Cluster nicht die größte Gruppe darstellt. Auch aus dieser Perspektive sind weitere Untersuchungen wünschenswert, warum gerade weibliche Fachstudierende in Klausuren unerwartet schlecht abschneiden, inwiefern sie sich in den genannten Variablen von anderen Studierenden unterscheiden oder ob sich dieser Effekt in anderen Stichproben möglicherweise nicht zeigt.

Limitationen

Obwohl für die vorliegende Studie auf Daten aus sechs verschiedenen Lehrveranstaltungen zurückgegriffen werden konnte, sind die Anzahlen der untersuchten Studierenden, insbesondere in einigen Teilgruppen, wie z. B. in der der Nicht-Lehramtsstudentinnen, relativ gering, sodass Verallgemeinerungen mit Vorsicht zu behandeln sind. Zudem ist unklar, inwiefern die verschiedenen Gegebenheiten der untersuchten Lehrveranstaltungen und insbesondere die Einschränkungen aufgrund der COVID-19-Pandemie die Ergebnisse beeinflussen. Darüber hinaus wurden hier jeweils Nicht-Lehramts- und Lehramtsstudiengänge zusammengefasst, bei denen womöglich eine differenziertere Betrachtung einzelner Studiengänge noch weiteres Aufklärungspotenzial birgt. Diese Zusammenfassung ist insbesondere bei der Betrachtung der Mittelwerte von Lehramtsstudierenden zu berücksichtigen, bei denen Veranstaltungen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus (die aufgrund der z-Standardisierung keine Berücksichtigung finden) und auch Veranstaltungen, die nur von Lehramtsstudierenden besucht werden (Kultur der Mathematik, bei der die Mittelwerte für Lehramtsstudierende aufgrund der z-Standardisierung dann 0 sind) miteinbezogen werden. Für solche differenzierteren Betrachtungen wäre allerdings ein größerer Datensatz notwendig. Da entsprechende Daten an (fast) jeder Universität vorhanden sein sollten, erscheinen ähnliche Studien nicht sehr aufwändig und wünschenswert für eine breitere empirische Basis und Weiterentwicklung gendersensibler Lehre. Prüfungen stellen dabei die zentralen Hürden und Ausgangspunkte für weitere professionelle Entwicklungen von angehenden Mathematikerinnen, Mathematikern, Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern dar, bei denen sehr genau darauf geachtet werden muss, dass sie möglichst gut die tatsächlich gewünschten Fähigkeiten überprüfen und nicht schon aufgrund ihres Formats gewisse Gruppen benachteiligen.

Implikationen für Forschung und Praxis

Insgesamt kann die Frage, welche geschlechtsspezifischen Auswirkungen die unterschiedlichen hier untersuchten Prüfungsformate mit dem vorliegenden Studiendesign haben, vor allem auch aufgrund der unterschiedlichen studienkontextuellen Voraussetzungen, möglicherweise weiterer entscheidender hier nicht erhobener Variablen wie Persönlichkeitseigenschaften, Lernstrategien oder Vorwissen und der kleinen Teilnehmer:innenzahl, nicht abschließend beantwortet werden. Dies impliziert jedoch direkt ein Desiderat nach weiterer Forschung, die diese Variablen mitberücksichtigt. Dabei sollte nicht unterschlagen werden, dass es zudem (bzw. eigentlich zuerst) einer klareren theoretischen Ausarbeitung bedarf, welches Wissen, bzw. welche mathematischen Fähigkeiten und Kompetenzen tatsächlich als Ziel gegebener fachmathematischer Lehrveranstaltungen erwünscht sind und inwiefern diese tatsächlich in bestehenden Klausuren abgebildet sind, bzw. durch welche Prüfungsformate diese am besten operationalisiert werden können. Klar ist, dass Prüfungsformen und -inhalte normativ gesetzt werden (müssen) und so zu erbringende

Leistungsanforderungen und Leistungsniveaus mit Blick auf Form, Art und Abrufbarkeit mathematischen Wissens definieren. Diskutiert werden kann allerdings, ob in den ersten Semestern tatsächlich relativ schnell abrufbares Wissen, wie es in Klausuren und auch mündlichen Prüfungen verlangt ist, den hochschuldidaktischen Lernzielvorstellungen am besten entspricht und wünschenswerte mathematische Denk- und Arbeitsweisen geeignet widerspiegelt. Darüber hinaus sollte die eingangs beschriebene „rationale Fachkultur" und der Einfluss der vornehmlich männlich besetzten Professuren nicht unterschätzt werden und zumindest reflektiert werden. Tatsächlich sind im Mathematikstudium, spätestens im Rahmen von Abschlussarbeiten, auch andere Prüfungsformate implementiert. Wenn diese relevant werden, haben allerdings viele Mathematikstudent:innen das Studium bereits abgebrochen.

Unabhängig davon, wie solche wünschenswerten Fähigkeiten und Kompetenzen definiert werden und mit welchen Prüfungsformen ihr Erreichen überprüft wird, erscheint eine gute Passung von Vorlesung, Übungen und Klausur, durch die Lernziele möglichst klar definiert werden, durch die Übungsaufgaben Lernstrategien, die diese Lernziele unterstützen, anregen und durch die Leistungsanforderungen in Prüfungen so transparent werden, dass eine gewissenhafte Vorbereitung möglich und honoriert wird, essentiell – sowohl für eine gute Lehre generell als auch, mit Blick auf unsere theoretischen Überlegungen, zur Förderung weiblicher Mathematikstudierender. Ansätze, wie eine solche Passung erreicht werden kann, sind z. B. im Rahmen des „constructive alignments" (Biggs & Tang, 2011) weiter ausgearbeitet.

Literatur

Abele, A. E., & Krüsken, J. (2000). *Studienabschluss, Ziele, berufliche und private Perspektiven bei Mathematikerinnen und Mathematikern aus Diplom-und Lehramtsstudiengängen im Vergleich* (Nr. 3; Frauen in der Mathematik).

Abele, A. E., Neunzert, H., & Tobies, R. (2004). Diplommathematikerinnen und -mathematiker. In A. E. Abele, H. Neunzert, & R. Tobies, *Traumjob Mathematik!* (S. 55–80). Birkhäuser Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7963-7_4

Alcock, L., Attridge, N., Kenny, S., & Inglis, M. (2014). Achievement and behaviour in undergraduate mathematics: Personality is a better predictor than gender. *Research in Mathematics Education*, *16*(1), 1–17. https://doi.org/10.1080/14794802.2013.874094

Astorne-Figari, C., & Speer, J. D. (2018). Drop out, switch majors, or persist? The contrasting gender gaps. *Economics Letters*, *164*, 82–85. https://doi.org/10.1016/j.econlet.2018.01.010

Baumert, J., Bos, W., & Lehmann, R. H. (2013). *TIMSS/III Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie — Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn: Band 1 Mathematische und naturwissenschaftliche Grundbildung am Ende der Pflichtschulzeit*. Springer-Verlag.

Biggs, J. B., & Tang, C. (2011). *Teaching For Quality Learning At University*. McGraw-Hill Education. http://www.msvu.ca:2048/login?url=http://www.msvu.eblib.com/patron/FullRecord.aspx?p=798265

Dieter, M., Brugger, P., Schnelle, D., & Törner, G. (2008). Zahlen rund um das Mathematikstudium – Teil 1. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *16*(1), 16–21.

Dieter, M., & Törner, G. (2012). Zahlen rund um das Lehramt Mathematik (I): Studienanfänger im Jahr 2010. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *20*(2).

https://doi.org/10.1515/dmvm-2012-0047

Dieter, M., & Törner, G. (2013). Zahlen rund um das Lehramt Mathematik 2—Absolventen im Jahr 2010. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *21*(1). https://doi.org/10.1515/dmvm-2013-0019

Dubois-Shaik, F., & Fusulier, B. (2017). Understanding gender inequality and the role of the work/family interface in contemporary academia: An introduction. *European Educational Research Journal*, *16*(2–3), 99–105. https://doi.org/10.1177/1474904117701143

Else-Quest, N. M., Hyde, J. S., & Linn, M. C. (2010). Cross-national patterns of gender differences in mathematics: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, *136*(1), 103–127. https://doi.org/10.1037/a0018053

Ernest, P. (2002). *The Philosophy of Mathematics Education*. Routledge.

Fischer, F., Schult, J., & Hell, B. (2013). Sex-specific differential prediction of college admission tests: A meta-analysis. *Journal of Educational Psychology*, *105*(2), 478–488. https://doi.org/10.1037/a0031956

Forgasz, H. J., & Leder, G. C. (2017). Persistent gender inequities in mathematics achievement and expectations in Australia, Canada and the UK. *Mathematics Education Research Journal*, *29*(3), 261–282. https://doi.org/10.1007/s13394-017-0190-x

Geisler, S., Rolka, K., & Dehling, H. (2019). Bleiben oder gehen?-Eine Mixed-Methods-Studie zu frühem Studienabbruch und Verbleib von Mathematikstudierenden. In *Hochschuldidaktik erforscht wissenschaftliche Perspektiven auf Lehren und Lernen* (S. 79–90).

Gildehaus, L. (angenommen). Identität als Perspektive zur Genese individueller Wertehirarchien im Mathematikstudium. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021*.

Göller, R. (2020). *Selbstreguliertes Lernen im Mathematikstudium*. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-28681-1

Göller, R., & Besser, M. (in Druck). Studienwahlmotive von Bewerberinnen und Bewerbern auf ein Lehramtsstudium und auf andere Studiengänge – Studiengangübergreifende Vergleiche und Profilanalysen. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*.

Göller, R., & Rück, H.-G. (eingereicht). Emotions in self-regulated learning of first-year mathematics students. In R. Biehler, G. Gueudet, M. Liebendörfer, C. Rassmussen, & C. Winsløw (Hrsg.), *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education: New Directions*.

Grözinger, G. (2017). Einflüsse auf die Notengebung: Eine Analyse ausgewählter Fächer auf Basis der Prüfungsstatistik. In V. Müller-Benedict & G. Grözinger (Hrsg.), *Noten an Deutschlands Hochschulen* (S. 79–116). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-15801-9_2

Hannover, B., & Kessels, U. (2011). Sind Jungen die neuen Bildungsverlierer? Empirische Evidenz für Geschlechterdisparitäten zuungunsten von Jungen und Erklärungsansätze. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, *25*(2), 89–103. https://doi.org/10.1024/1010-0652/a000039

Helbig, M. (2012). Die Umkehrung – Geschlechterungleichgheiten beim Erwerb des Abiturs im Wandel. In R. Becker & H. Solga (Hrsg.), *Soziologische Bildungsforschung* (Bd. 52, S. 374–392). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-00120-9_16

Heublein, U., Ebert, J., Hutzsch, C., Isleib, S., König, R., Richter, J., & Woisch, A. (2017). *Zwischen Studienerwartungen und Studienwirklichkeit*. Deutsches Zentrum für Hochschul- und Wissenschaftsforschung GmbH.

Huang, C. (2013). Gender differences in academic self-efficacy: A meta-analysis. *European Journal of Psychology of Education*, *28*(1), 1–35. https://doi.org/10.1007/s10212-011-0097-y

Huang, C. (2016). Achievement goals and self-efficacy: A meta-analysis. *Educational Research Review*, *19*, 119–137. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2016.07.002

Hyde, J. S. (2014). Gender Similarities and Differences. *Annual Review of Psychology*, *65*(1), 373–398. https://doi.org/10.1146/annurev-psych-010213-115057

Jaremus, F., Gore, J., Prieto-Rodriguez, E., & Fray, L. (2020). Girls are still being 'counted out': Teacher expectations of high-level mathematics students. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(2), 219–236. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09986-9

Johns, C. (2020). Self-Regulation in First-Semester Calculus. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *6*(3), 404–420. https://doi.org/10.1007/s40753-020-00114-9

Kaiser, G., Hoffstall, M., & Orschulik, A. B. (2012). Gender Role Stereotypes in the Perception of Mathematics: An Empirical Study with Secondary Students in Germany. In H. J. Forgasz & F. Rivera (Hrsg.), *Towards Equity in Mathematics Education* (S. 115–140). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-27702-3_11

Keiser, H. N., Sackett, P. R., Kuncel, N. R., & Brothen, T. (2016). Why women perform better in college than admission scores would predict: Exploring the roles of conscientiousness and course-taking patterns. *Journal of Applied Psychology*, *101*(4), 569–581. https://doi.org/10.1037/apl0000069

Kling, K. C., Noftle, E. E., & Robins, R. W. (2013). Why Do Standardized Tests Underpredict Women's Academic Performance? The Role of Conscientiousness. *Social Psychological and Personality Science*, *4*(5), 600–606. https://doi.org/10.1177/1948550612469038

Kollmayer, M., Schober, B., & Spiel, C. (2018). Gender stereotypes in education: Development, consequences, and interventions. *European Journal of Developmental Psychology*, *15*(4), 361–377. https://doi.org/10.1080/17405629.2016.1193483

Leonard, D. K., & Jiang, J. (1999). Gender bias and the college predictions of the SATs: A cry of despair. *Research in Higher education*, *40*(4), 375–407.

Liebendörfer, M. (2018). *Motivationsentwicklung im Mathematikstudium*. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-22507-0

Liebendörfer, M., Gildehaus, L., & Göller, R. (2020). Geschlechterunterschiede beim Einsatz von Lernstrategien in Mathematikveranstaltungen. In H.-S. Siller, W. Weigel, & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 1409–1412). WTM-Verlag Münster. https://doi.org/10.37626/GA9783959871402.0

Liebendörfer, M., Gildehaus, L., Göller, R., Hochmuth, R., Schaper, N., Kortemeyer, J., Ostsieker, L., & Rode, J. (eingereicht). Gendered Patterns in University Students' Affect and Learning Strategies for Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*.

Liebendörfer, M., & Göller, R. (2016a). Abschreiben von Übungsblättern–Umrisse eines Verhaltens in mathematischen Lehrveranstaltungen. In *Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2014 Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 7. & 8. November 2014 an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster* (S. 119–141). WTM-Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Liebendörfer, M., & Göller, R. (2016b). Abschreiben von Übungsaufgaben in traditionellen und innovativen Mathematikvorlesungen. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-*

Vereinigung, *24*(4), 230–233. https://doi.org/10.1515/dmvm-2016-0084

Lindberg, S. M., Hyde, J. S., Petersen, J. L., & Linn, M. C. (2010). New trends in gender and mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, *136*(6), 1123–1135. https://doi.org/10.1037/a0021276

Mattern, K., Sanchez, E., & Ndum, E. (2017). Why Do Achievement Measures Underpredict Female Academic Performance? *Educational Measurement: Issues and Practice*, *36*(1), 47–57. https://doi.org/10.1111/emip.12138

Neugebauer, M. (2013). Wer entscheidet sich für ein Lehramtsstudium – und warum? Eine empirische Überprüfung der These von der Negativselektion in den Lehrerberuf. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *16*(1), 157–184. https://doi.org/10.1007/s11618-013-0343-y

Niessen, A. S. M., Meijer, R. R., & Tendeiro, J. N. (2019). Gender-Based Differential Prediction by Curriculum Samples for College Admissions. *Educational Measurement: Issues and Practice*, *38*(3), 33–45. https://doi.org/10.1111/emip.12266

Nosek, B. A., & Smyth, F. L. (2011). Implicit Social Cognitions Predict Sex Differences in Math Engagement and Achievement. *American Educational Research Journal*, *48*(5), 1125–1156. https://doi.org/10.3102/0002831211410683

Pomerantz, E. M., Altermatt, E. R., & Saxon, J. L. (2002). Making the grade but feeling distressed: Gender differences in academic performance and internal distress. *Journal of Educational Psychology*, *94*(2), 396–404. https://doi.org/10.1037/0022-0663.94.2.396

Prenzel, M., Sälzer, C., Klieme, E., & Köller, O. (Hrsg.). (2013). *PISA 2012: Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland*. Waxmann.

Ramm, M., & Bargel, T. (2005). *Frauen im Studium: Langzeitstudie 1983-2004*. Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF).

Richardson, M., Abraham, C., & Bond, R. (2012). Psychological correlates of university students' academic performance: A systematic review and meta-analysis. *Psychological Bulletin*, *138*(2), 353–387. https://doi.org/10.1037/a0026838

Rodd, M., & Bartholomew, H. (2006). Invisible and special: Young women's experiences as undergraduate mathematics students. *Gender and Education*, *18*(1), 35–50. https://doi.org/10.1080/09540250500195093

Ruffing, S., Wach, F.-S., Spinath, F. M., Brünken, R., & Karbach, J. (2015). Learning strategies and general cognitive ability as predictors of gender- specific academic achievement. *Frontiers in Psychology*, *6*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01238

Sax, L. J., Kanny, M. A., Riggers-Piehl, T. A., Whang, H., & Paulson, L. N. (2015). "But I'm Not Good at Math": The Changing Salience of Mathematical Self-Concept in Shaping Women's and Men's STEM Aspirations. *Research in Higher Education*, *56*(8), 813–842. https://doi.org/10.1007/s11162-015-9375-x

Schiefele, U., Streblow, L., Ermgassen, U., & Moschner, B. (2003). Lernmotivation und lernstrategien als bedingungen der studienleistung. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, *17*(3), 185–198.

Schmitt, D. P., Realo, A., Voracek, M., & Allik, J. (2008). Why can't a man be more like a woman? Sex differences in Big Five personality traits across 55 cultures. *Journal of Personality and Social Psychology*, *94*(1), 168–182. https://doi.org/10.1037/0022-3514.94.1.168

Schneider, M., & Preckel, F. (2017). Variables associated with achievement in higher education: A systematic review of meta-analyses. *Psychological Bulletin*, *143*(6), 565–600. https://doi.org/10.1037/bul0000098

Sheu, H.-B., Lent, R. W., Miller, M. J., Penn, L. T., Cusick, M. E., & Truong, N. N. (2018). Sources of self-efficacy and outcome expectations in science, technology, engineering, and mathematics domains: A meta-analysis. *Journal of Vocational Behavior*, *109*, 118–136. https://doi.org/10.1016/j.jvb.2018.10.003

Solomon, Y. (2012). Finding a voice? Narrating the female self in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1–2), 171–183. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9384-z

Solomon, Y., Lawson, D., & Croft, T. (2011). Dealing with 'fragile identities': Resistance and refiguring in women mathematics students. *Gender and Education*, *23*(5), 565–583. https://doi.org/10.1080/09540253.2010.512270

Solomon, Y., Radovic, D., & Black, L. (2016). "I can actually be very feminine here": Contradiction and hybridity in becoming a female mathematician. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 55–71. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9649-4

Statistisches Bundesamt. (2019). *Personal an Hochschulen—Fachserie 11 Reihe 4.4—2019*. Statistisches Bundesamt. https://www.destatis.de/DE/Themen/Gesellschaft-Umwelt/Bildung-Forschung-Kultur/Hochschulen/Publikationen/Downloads-Hochschulen/personal-hochschulen-2110440197004.html

Statistisches Bundesamt. (2020). *Frauenanteile nach akademischer Laufbahn*. Statistisches Bundesamt. https://www.destatis.de/DE/Themen/Gesellschaft-Umwelt/Bildung-Forschung-Kultur/Hochschulen/Tabellen/frauenanteile-akademischelaufbahn.html

Stout, J. G., Dasgupta, N., Hunsinger, M., & McManus, M. A. (2011). STEMing the tide: Using ingroup experts to inoculate women's self-concept in science, technology, engineering, and mathematics (STEM). *Journal of Personality and Social Psychology*, *100*(2), 255–270. https://doi.org/10.1037/a0021385

Towfigh, E., Traxler, C., & Glöckner, A. (2014). Zur Benotung in der Examensvorbereitung und im ersten Examen. *Zeitschrift für Didaktik der Rechtswissenschaft*, *1*(1), 8–27. https://doi.org/10.5771/2196-7261-2014-1-8

Weisberg, Y. J., DeYoung, C. G., & Hirsh, J. B. (2011). Gender Differences in Personality across the Ten Aspects of the Big Five. *Frontiers in Psychology*, *2*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2011.00178

Wild, K.-P. (2005). Individuelle Lernstrategien von Studierenden. Konsequenzen für die Hochschuldidaktik und die Hochschullehre. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *23*(2), 191–206.

Zacharia, Z. C., Hovardas, T., Xenofontos, N., Pavlou, I., & Irakleous, M. (2020). *Education and Employment of Women in Science, Technology and the Digital Economy, Including AI and Its Influence on Gender Equality*. European Parliament.

Genderthemen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II

Renate Motzer

In Seminaren, in denen über gendersensiblen Unterricht nachgedacht wird, kommen Studierende oft zu dem Schluss, dass gendersensibler Unterricht heißt, der Unterricht soll möglichst „genderneutral“ sein. Es sollen also z.B. keine Sachthemen behandelt werden, zu dem ein Geschlecht vermutlich nur wenig Beziehung hat. Schnelle Autos, viele technische Erfindungen, Fußball u.ä. seien Themen, die Mädchen kaum interessieren und daher schalten sie bei solchen Kontexten viel schneller ab als Jungen. Ginge es dagegen um Mode und Schminken oder um Pferde, würden Jungen nicht das nötige Interesse aufbringen. Sollen also geschlechtsspezifische Präferenzen gar keine Rolle spielen?

Statistiken, die vermuten lassen, dass Frauen de facto die besseren Autofahrer*innen sind, könnten besprochen werden, um Vorurteile abzubauen, aber Statistiken, die Vorurteile eher bestätigen? Dürfen sie im Mathematikunterricht vorkommen? Z.B. gibt es einige Ergebnisse aus PISA-Studien, die zum Schluss kommen, deutschlandweit oder auch OECD-weit schneiden Jungen in Mathematik signifikant besser ab als Mädchen.

Folgendes Unterrichtsbeispiel versucht, auf solche Statistiken nicht zu verzichten, aber dennoch auch Beispiele von Ländern zu thematisieren, in denen die Mädchen erfolgreicher sind. Daran können die Jugendlichen erkennen, dass es keine genetischen Unterschiede sein können, die die Ursachen für die geringere Mathematik-Affinität deutscher Mädchen im Vergleich zu deutschen Jungs sind.

Auch das Beispiel aus dem Bereich Fußball thematisiert nicht nur den Männerfußball, sondern auch die Frauenbundesliga. Damit werden Mädchen, die sich gar nicht für Fußball interessieren, vermutlich immer noch nicht besonders motiviert sein, aber das Beispiel zeigt doch, dass auch Fußball ein Thema für Frauen sein kann, und das nicht nur passiv.

Mathematisch eingebunden sind die beiden Themen im Bereich der Stochastik. Es geht um Abweichungen von Erwartungswerten bzw. statistisch ermittelten Mittelwerten, die zur Modellierung verwendet werden und im zugehörigen Modell als Erwartungswert auftreten. Im Jahr 2021 wurde z.B. in Bayern coronabedingt auf den Lehrplaninhalt „Hypothesentest“ im Abitur verzichtet. Die Beispiele hier zeigen auf, wie man ein „signifikantes“ Abweichen auch anders definieren könnte und mit einer Abweichung von mehr als zwei Standardabweichungen vom Erwartungswert in Verbindung bringen könnte, welche im Unterricht behandelt wird. So könnte auch dieser Abiturjahrgang eine Ahnung davon gewinnen, was dahintersteckt, wenn in den Medien von „signifikanten“ Unterschieden die Rede ist.

Hier zunächst als Beispiel die Aufgaben zu den PISA-Ergebnissen, dann eine Erläuterung, warum Wurzel aus n oder das Doppelte davon ein gutes Kriterium für „signifikant“ sein kann, und schließlich das Aufgabenbeispiel aus der Fußballwelt.

In einem Genderseminar können die Beispiele in beiderlei Hinsicht ausgewertet werden: Leistungsunterschiede zwischen Mädchen und Jungen im Mathematik sind sowieso Thema und was „signifikant“ heißt, muss im Rahmen von PISA- und TIMSS-Daten diskutiert werden, ohne dass geklärt werden kann, wie man zu den zugehörigen p-Werten kommt. Daher bietet sich eine Fragestellung aus diesem Bereich an, die mit dem Schulwissen auf Signifikanz untersucht werden kann.

Dieses Wissen schließlich in einem anderen gendersensiblen Kontext zu vertiefen führt zu den Fußballaufgaben.

Am Ende kann diskutiert werden, wie man die beiden Thematiken in den Unterricht einbauen und dabei Diskussionen über die Genderaspekte der Themen „Leistungen in Mathematik“ und „Fußball“ im Unterricht anregen kann.

1. Beispiel PISA-Test-Ergebnisse von Jungen und Mädchen – könnten die Unterschiede nur zufällig sein?

Bei PISA 2015 erzielten in Deutschland Jungen im Schnitt 514 Punkte und Mädchen 498 Punkte (getestet wurden jeweils 15-jährige Schülerinnen und Schüler weltweit). Ist nun die Differenz von 16 Punkten gravierend oder könnte sie zufällig entstanden sein? Am PISA-Test 2015 nahmen ca. 6000 deutsche Schülerinnen und Schüler teil (3000 Mädchen und ebenso viele Jungen).

Mit Mitteln der Schulmathematik kann man das nicht klären.

Mit schulischen Mitteln kann man nur Experimente betrachten, die man als „Bernoulli-Kette" bezeichnen kann. Das können also Fragestellungen sein, bei denen es nur zwei Möglichkeiten pro getesteter Person/ getestetem Objekt gibt. So eine Frage wäre: hat die getestete Person mindestens Stufe V erreicht?

Ein gutes Ergebnis in Mathematik (mindestens Stufe V) erzielten in Deutschland nur 15,5 % der Jungen und nur 10,3 % der Mädchen. Hier lässt sich bei jedem getesteten Jugendlichen eine Ja/Nein-Aussage machen. Die Auswahl der Testpersonen erfolgte geeignet zufällig. Man könnte die Auswahl also wohl als Bernoulli-Kette modellieren. Als p wird der Mittelwert 12,9% genommen.

Aufgabe 1.a) Wir nehmen an, dass 12,9% die jeweilige Wahrscheinlichkeit in beiden Geschlechtergruppen wäre. Wie viele der 3000 zu testenden Jungen (wie viele bei 3000 zu testenden Mädchen) müssten sich jeweils auf Stufe V befinden? (Bestimmen Sie den Erwartungswert).

b) De facto sind es 78 mehr Jungen und 78 weniger Mädchen auf Stufe V. Sind diese Abweichungen größer als die doppelte Standardabweichung? (Warum muss man wieder n= 3000 und p = 12,9% nehmen?)

2.a) Bei PISA 2012 (dort haben genauso viele Jungen und Mädchen teilgenommen wie 2015) waren es noch 20% der Jungen, die die Niveaustufe V erreicht haben und 15% der Mädchen. Liegt auch hier die Abweichung einem geeigneten Erwartungswert über der doppelten Standardabweichung?

Rechnen Sie wie bei Aufgabe 1 mit dem Mittelwert 17,5% als p.

b) Können Sie sich einen ähnlichen Vergleich vorstellen, um darüber etwas auszusagen, ob sich die Leistungen der Jungen /der Mädchen von 2012 auf 2015 deutlich verschlechtert haben? (Hier sollten die Jungen, die 2015 teilgenommen haben mit den Jungen verglichen werden, die 2012 teilgenommen haben; das gleiche kann für die beiden Mädchengruppen gerechnet werden).

3. Bei PISA 2018 sind es insgesamt 13% der Jungen und Mädchen, die Niveaustufe V erreichen. Es sind 15% bei den Jungen und 11% bei den Mädchen. Die Zahlen von 2015 haben sich also ungefähr bestätigt.

Leider gab es im Bereich der schwachen Leistungen Abweichungen zu 2015: 2015 waren es noch 17% der Jungen und Mädchen, die maximal Stufe I erreichten, 2018 waren es schon 21%. Insgesamt ist der Unterschied zwischen Jungen und Mädchen kleiner geworden, aber leider nicht, weil die Mädchen besser geworden wären, sondern weil die Jungen insgesamt schwächer wurden.

Von signifikant (mehr als zwei Standardabweichungen Unterschied zum Mittelwert) zu nichtsignifikant (weniger als 2 Standardabweichungen Unterschied zum Mittelwert) hat sich der Geschlechterunterschied geändert, was das Erreichen von maximal Stufe II angeht: 2015

gehörten 42% der Mädchen zu dieser Gruppe und 36% der Jungen. 2018 sind es 43% der Mädchen und 40 % der Jungen.

Rechnen Sie dies nach (und gehen Sie dabei wieder von je 3000 Mädchen und Jungen aus).

4.a) Mehr Mädchen als Jungen, die mindestens Stufe V erreichen, findet man in kaum einem Land. In Macau schaffen es im Jahr 2015 immerhin 22,5% der Mädchen und „nur" 21,2% der Jungen. Zeigen Sie, dass dieser Unterschied (von 1,3 %) bei den jeweils 2200 getesteten Jugendlichen pro Geschlecht nicht die Grenzen von 2 Standardabweichungen erreicht.

Modellieren Sie die Aufgaben analog zur Aufgabe 1. Was muss als n, was als p gewählt werden?

b) Anders ist es mit dem Unterschied zwischen den Geschlechtern bei den Jugendlichen, die in Mathematik so schwach sind, dass sie nicht die Stufe II erreichen. Dies sind in Macau 8% der Jungen und 5,3% der Mädchen. Zeigen Sie, dass hier das 2 Standardabweichungs-Kriterium erreicht wird.

Welchen Wert sollten Sie hier für p verwenden?

c) In der Betrachtung der Risikogruppe (unterhalb der Stufe II) sieht in Norwegen das Bild für die Mädchen ebenfalls besser aus. Von ca. 2500 pro Geschlecht Getesteten befinden sich 18,8% der Jungen in dieser Gruppe und 15,3 % der Mädchen. Ist hier das Kriterium erreicht?

2. Ähnliche Aufgaben aus dem Bereich Fußball:

1.) Unentschieden in der 1. und 2. Bundesliga des Männerfußballs

Nehmen wir nun als Bespiel einen für viele „lebenswichtigen" Bereich: Fußball.

Langjährige Aufzeichnungen zeigen, dass in der 1. und in der 2. Bundesliga ca. ¼ aller Spiele unentschieden ausgehen. In der 2. Liga sind es ein bisschen mehr als in der ersten.

Hätte jemand im Sommer 2017 beschlossen, als Stichprobe die Spiele der Saison 17/18 zu wählen, so hätte er folgende Testergebnisse bekommen: In der Saison (17/18) gab es keinen großen Unterschied zwischen den beiden Ligen. In der 1. Liga gingen 83 Spiele unentschieden aus, in der 2. waren es 89 Spiele (jeweils von 306 Spielen; es sind also jeweils etwas mehr als ¼ der Spiele). Sprechen die 89 Unentschieden in der 2. Bundesliga dafür, dass dort generell mehr als ¼ der Spiele unentschieden ausgehen?

Prüfen Sie dies wieder mit dem Kriterium „doppelte Standardabweichung". Warum muss man n = 306 und p = ¼ wählen?

Hinweis: In anderen Saisonen war der Unterschied zwischen 1. und 2. Bundesliga schon deutlicher. Hier hätte man diese Unterschiede – analog zu den PISA-Aufgaben- darauf hin untersuchen können, ob es deutliche Unterschiede zwischen den beiden Ligen gibt. Dazu die zugehörigen Zahlen:

	17/18	16/17	15/16	14/15	13/14	12/13		20/21	19/20	18/19
1.	83	74	71	82	64	78		81	68	73
2.	89	88	86	88	88	90		72	98	88

2.) Frauenfußball

Zuletzt noch, nicht nur um der Gendergerechtigkeit willen, sondern weil die Daten insofern anders sind, dass sie eine Entwicklung im Lauf der Zeit anzeigen, sei das Beispiel Frauenfußball erwähnt. Schaut man sich die Anzahl der Tore und die Anzahl der Unentschieden beim Frauenfußball an, so sieht man, dass die Annahme, es handele sich über viele Jahre hinweg um

eine Bernoulli-Kette, nicht naheliegend ist. Die Anzahlen haben sich über die Jahre deutlich geändert.

Bei der Betrachtung der Jahre 2012 - 2018 könnte einem die Idee kommen zu testen, ob sich die Situation in den letzten 3 Jahren im Vergleich zu den vorherigen 3 Jahren geändert hat.

Die Daten:

Es sind 132 Spiele pro Saison (12 Mannschaften).

- 17/18: 406 Tore, 16 Unentschieden
- 16/17: 371 Tore, 19 Unentschieden
- 15/16: 421 Tore, 19 Unentschieden
- 14/15: 455 Tore, 26 Unentschieden
- 13/14: 521 Tore, 27 Unentschieden
- 12/13: 451 Tore, 21 Unentschieden

Je 3 Jahre zusammengenommen ergeben ……. Tore bzw. ……. Tore, …. Unentschieden bzw. …. Unentschieden.

a) Testet man wie vorher die Gesamtzahl der Tore darauf, ob sie in den ersten 3 Jahren oder in den zweiten 3 Jahren gefallen sind, so ergibt $\sqrt{n}$ = $\sqrt{2625}$≈ 51. Unterscheiden sich die Anzahlen der Tore also deutlich? (Warum kann man n = 2625 und p = ½ wählen?)

b) Was die Anzahl der Unentschieden angeht, sind es in beiden Gruppen 3·132= 396 Spiele, und $\sqrt{npq}$ ≈ 7,3 mit *p* = (54 + 74): 792 = 16% (relative Häufigkeit der Spiele, im Lauf der 6 Jahre unentschieden auszugehen). Was folgt aus dem Kriterium der 2-Standardabweichungen?

c) Bei den Unentschieden könnte man trotz des Ergebnisses in b) sagen, dass es deutlich weniger geworden sind, wenn man die ersten 3 Jahre nicht als zufällig ansieht, sondern als gegebenes Modell voraussetzt, mit dem man dann die Ergebnisse der folgenden 3 Jahre vergleicht. Welche Zahlen würden dann eine Rolle spielen? (Warum wieder n = 396 und diesmal p = 18,7% ?)

   Hinweis: in den nächsten 3 Jahren ging es mit folgenden Daten weiter:

   18/19: 517 Tore, 27 Unentschieden
   19/20: 502 Tore, 15 Unentschieden
   20/21: 458 Tore, 17 Unentschieden

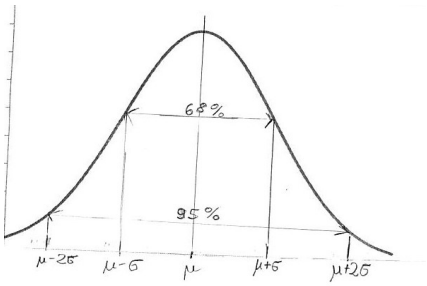
3.) Ist Frauenfußball aus Ihrer Sicht ein gutes Unterrichtsthema?

3. Warum eignet sich Wurzel aus *n* als Wert zur Abschätzung von „Signifikanz“?

Man könnte diese Rechnungen mit dem Begriff „Signifikanz“ in Verbindung bringen.

Weicht eine Stichprobe um mehr als 2 Standardabweichungen (2 σ) vom Erwartungswert ab, so kann man dies als „signifikante“ Abweichung deuten. Eine solche Abweichung kommt i.a. nur mit einer Wahrscheinlichkeit von unter 5% vor, wenn die angenommene Binomialverteilung mit dem vermuteten *p* zutrifft (vor allem wenn *n* groß genug ist, sodass eine Näherung durch die Normalverteilung vorgenommen werden kann).

Oft schauen die zugehörigen Verteilungen der sog. Normalverteilung ähnlich (vor allem, wenn p in der Nähe von 0,5 liegt):



Man sieht an dieser Graphik, dass eine Abweichung vom Erwartungswert um mehr als eine Standardabweichung mit 32% zu erwarten ist, eine Abweichung von mehr als 2 Standardabweichungen mit ca. 5%.

Zusatz, falls p in der Nähe von 0,5 liegt:

2 σ wiederum lässt sich, wenn p nicht zu weit von 0,5 entfernt ist, gut durch $\sqrt{n}$ abschätzen, denn $p(1-p)$ ist kleiner gleich ¼ (bei (0,5; 0,25) liegt der Scheitel der zugehörigen Parabel), die Wurzel daraus also kleiner gleich ½. Somit ist 2 σ ≤ $\sqrt{n}$.

Damit hat man folgende Abschätzung:

Testgröße: Anzahl *x* der Getesteten, die das untersuchte Verhalten zeigen (von insgesamt *n*)
Erwartungswert: *np*.
Standardabweichung: kleiner gleich 0,5$\sqrt{n}$.
Liegt *x* außerhalb von $[np - \sqrt{n}; np + \sqrt{n}]$? Dann ist die Abweichung „signifikant“.

4.Einschätzungen von Studierenden zum Thema „Frauenfußball im Mathematikunterricht“

Drei junge Frauen, die das Seminar „Mathematik gendersensibel unterrichten“ besucht haben, schätzen das Thema „Frauenfußball im Mathematikunterricht“ wie folgt ein und fassen dabei alle Argumente, die sonst noch im Seminar erwähnt wurden, gut zusammen:

„Unserer Meinung nach ist Frauenfußball ein sehr gendersensibles Thema, da das Thema Fußball in unserer Gesellschaft von beiden Seiten der Geschlechter viel Aufmerksamkeit bekommt. Fußball ist nicht nur ein beliebtes Hobby, das nicht nur selbst gespielt werden kann, sondern auch auf dem Sofa, vor der Spielekonsole oder im Stadion mitgefeiert wird.

Doch was meint die Gesellschaft, wenn sie von *dem Fußball redet?*

Allgemein ist von Männerfußball die Rede, doch anstelle dieses Wort hierfür auch zu benutzen, redet man stets allgemein von dem Fußball. Achtet man auf die Resonanz beim Begriffs des *Frauenfußballs*, so erlangt dieser in unserer Gesellschaft einen fast schon ausgrenzenden Charakter, der belächelt wird. Allein der Begriff gibt schon Anlass, über das Thema des Genderns zu diskutieren.

Neben der geringeren Aufmerksamkeit hat Frauenfußball auch mit einer großen Menge an Vorurteilen zu kämpfen: „**Alles Lesben, Zicken und Memmen!“** schreibt die Sport Bild.

Jungen gehen Fußball spielen, Mädchen gehen in den Ballettunterricht.

Fußball wird von klein auf schon den Jungs zugeschrieben und als männliches Hobby festgelegt. Mädchen sollen mit Puppen spielen oder reiten gehen. Mädchen und jungen Frauen wird von klein auf signalisiert, dass sie im Fußball nichts verloren haben.

Das sind nur einige wenige Punkte, die bereits schon gut aufzeigen, dass Frauenfußball ein durchaus gendersensibles Thema ist.

Warum ein Unterrichtsthema?

Ganz einfach: im Unterricht sitzen nicht nur Jungen, sondern auch Mädchen.

Die Kinder und Jugendlichen (im Alter von 6-17 Jahren) befinden sich in einer oder mehreren Entwicklungsphasen. Ihnen sollte klargemacht werden, dass auch Mädchen Fußball spielen oder schauen dürfen und das völlig normal ist. Fußball ist außerdem ein Thema, dass nicht nur den Alltag der SuS betrifft, sondern auch im Mathematikunterricht (Modellaufgaben) eingebaut werden könnte."

Literatur

W. Riemer, Das „Eins durch Wurzel n Gesetz" – Einführung in statistisches Denken auf der Sekundarstufe I, in: MNU 46/5, 1993, S. 286-288

PISA 2015: https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Germany-DEU.pdf
Tabelle 1.5.6a auf: https://read.oecdilibrary.org/education/pisa-2015-ergebnisse-bandi/pisa-2015-ergebnisse_9789264267879-14-de#page74

PISA 2012: https://www.pisa.tum.de/pisa/pisa-2000-2018/pisa-2012/

PISA 2018: https://www.pisa.tum.de/pisa/pisa-2000-2018/pisa-2018/

Fußballergebnisse: auf www.kicker.de

Buchbesprechung zu:

Cordula Tollmien, Die Lebens- und Familiengeschichte der Mathematikerin Emmy Noether in Einzelaspekten

Dieses Jahr erschienen die ersten beiden Bände dieser Reihe. Band 1 trägt den Titel: „Kann eine Frau Privatdozentin werden?“ – die Umfrage des Preußischen Kultusministeriums zur Habilitation von Frauen 1907. Der zweite Band heißt: „Wir bitten nur um Dispens für den vorliegenden einzigartig liegenden Fall“ – die Habilitation Emmy Noethers. Die beiden Bände sind im Verlag trediton (tredition.de/buchshop) erschienen.

Worum geht es?

"Ihre Erzählung von Frl. Noethers Habilitationshindernissen hat uns sehr amüsiert. Gott, Gott, wie dumm die gescheiten Männer sind!", schrieb Hedwig Pringsheim (die Tochter der Frauenrechtlerin Hedwig Dohm und Schwiegermutter von Thomas Mann) am 2. März 1916 an David Hilbert, der ihr zuvor über seine erfolglosen Versuche, Emmy Noethers Habilitation durchzusetzen, berichtet hatte. Wie dumm die gescheiten Männer tatsächlich waren, das lässt sich sowohl an den streckenweise widersinnigen, jeder Logik und jedes Anspruchs auf Wissenschaftlichkeit entblößten Argumenten ablesen, die 1907 bei einer Umfrage an allen preußischen Universitäten gegen die Habilitation von Frauen vorgebracht wurden, wie auch an den zunächst erfolgreichen Versuchen eben dieser Männer, Emmy Noethers Habilitation zu verhindern. Es wird darüber hinaus schmerzhaft deutlich, welcher Ignoranz und Herabsetzung, häufig auch in stark sexualisierter Form, die Frauen ausgesetzt waren, die doch nichts anderes wollten als Wissenschaft betreiben. Doch die klarblickenden Männer, allen voran David Hilbert, die die Frauen unterstützten und sich mit ihnen gemeinsam gegen den eisigen Wind der ihnen entgegenschlagenden Vorurteile stemmten, erhellen eindrucksvoll das ansonsten düstere Bild.

Diese beiden Bände sind die ersten Veröffentlichungen einer Reihe, in der in loser Folge Ergebnisse ihrer biografischen Forschungen zu der Mathematikerin Emmy Noether publiziert werden sollen. Dabei ist das aus ihrer inzwischen fast dreißigjährigen Beschäftigung mit Emmy Noether hervorgegangene Projekt "Lebens- und Familiengeschichte Emmy Noethers" nicht linear, auf Noethers Lebensweg fokussiert angelegt, sondern mehrdimensional unter Einbeziehung des gesamten familiären und sozialgesellschaftlichen Beziehungsgefüges. Über die engere Familiengeschichte hinaus wird, soweit dies für Emmy Noethers Lebensweg von Bedeutung ist, auch das allgemeinhistorische Umfeld in den Blick genommen, wenn dies geboten erscheint auch einmal, wie in dem hier vorliegenden Band 1, als umfangreiche Einzelveröffentlichung.

"Eure Exzellenz bittet die mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung der philosophischen Fakultät der Göttinger Universität ehrerbietigst, ihr im Falle des Habilitationsgesuches von Fräulein Dr. Emmy Noether Dispens von dem Erlass des 29. Mai 1908 gewähren zu wollen, nach welchem die Habilitation von Frauen unzulässig ist."

Die in Band 1 dargestellte Geschichte dieses Erlasses, mit dem dann 1917 tatsächlich die Ablehnung des Habilitationsgesuchs Emmy Noethers aus dem Jahr 1915 begründet wurde, erlaubt aufschlussreiche Einblicke sowohl in die Argumentationsmuster, mit der sich die Mehrheit der preußischen Professoren des Eindringens von Frauen in den akademischen Lehrkörper erwehrte, als auch in das durchaus beeindruckende Engagement der unterlegenen Befürworter von Frauenhabilitationen. Vorausgegangen war dem Erlass eine Anfrage der Bonner Philosophischen Fakultät, die die Zoologin Maria von Linden habilitieren wollte. Das Ministerium reagierte mit einer großangelegten Umfrage an allen preußischen Universitäten,

deren Ergebnis dann die Rechtfertigung für das Verbot der Habilitation von Frauen bildete, das bis nach dem Ersten Weltkrieg Bestand haben sollte.

Dementsprechend brauchte es insgesamt drei Anläufe und einen politischen Systemwechsel, bis der am 20. Juli 1915 gestellte Antrag Emmy Noethers auf Habilitation schließlich im Mai 1919 positiv entschieden wurde und sie am 4. Juni 1919 ihre Probevorlesung halten konnte. Im zweiten Band der Reihe wird die äußerst spannende Habilitationsgeschichte Emmy Noethers im Detail aufgerollt und dabei insbesondere David Hilbert gewürdigt, der als unerschrockener Förderer und Unterstützer Emmy Noethers, als "David Frauenlob Hilbert", wie ihn seine Schüler einmal scherzhaft titulierten, neben Emmy Noether selbst die Hauptfigur, ja der "Held" dieser Geschichte der Habilitation einer außergewöhnlichen Frau ist.

Auch der Vorstoß Edith Steins, der die formalen Hürden für die Habilitation von Frauen endlich auch in Preußen beseitigte, wird hier erstmals in angemessenen Ausführlichkeit gewürdigt, wobei deutlich wird, dass Edith Stein unter anderem deshalb in Göttingen nicht habilitiert wurde, weil Emmy Noether dies zuvor gelungen war und die Gegner jeder Frauenhabilitation, die sich bei Emmy Noether nicht hatten durchsetzen können, ihren Widerstand nun gegen Edith Stein richteten.

Beide Bände enthalten jeweils über 50 SW-Abbildungen.

Wie geht es weiter?

Im nächsten Jahr wird der dritte Band der Noether-Biografie erscheinen, der sich mit Emmy Noethers Habilitationsarbeit beschäftigen wird.

(übernommen aus der Homepage von Cordula Tollmien: https://www.cordula-tollmien.de/)

Autor:innen

Andrea Blunck, Universität Hamburg
Anschrift: Bundesstr. 55, 20146 Hamburg
E-Mail: andrea.blunck@math.uni-hamburg.de

Robin Göller, Leuphana Universität Lüneburg
Anschrift: Universitätsallee 1, 21335 Lüneburg
E-Mail: robin.goeller@leuphana.de

Lara Gildehaus, Universität Paderborn
Anschrift: Institut für Mathematik - Sekretariat Rüter, Universität Paderborn,
Warburger Straße 100, 33098 Paderborn
E-Mail: lara.gildehaus@math.uni-paderborn.de

Michael Liebendörfer, Universität Paderborn
E-Mail: michael.liebendoerfer@math.upb.de

Jörn Steuding, Universität Würzburg
Anschrift: Emil-Fischer-Straße 40, 97074 Würzburg
E-Mail: steuding@mathematik.uni-wuerzburg.de

Anina Mischau, FU Berlin
Anschrift: Gender Studies in der Mathematik, Arnimallee 6, 14195 Berlin
E-Mail: amischau@mi.fu-berlin.de

Renate Motzer, Universität Augsburg
Anschrift: Institut für Mathematik, Universitätsstr. 14, 86159 Augsburg
E-Mail: renate.motzer@math.uni-augsburg.de

Andrea Reichenberger, FernUniversität Hagen
Anschrift: Lehrgebiet Philosophie I, Universitätsstr. 33, 58097 Hagen
E-Mail: andrea.reichenberger@fernuni-hagen.de